

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 15

Titolo nota

18/10/2013

Esercizio 1 Dimostrare che $(1, 2)$, $(3, -1)$ è una base di $\mathbb{R}^2$

Devo dim. che sono lin. ind. e che generano

LIN. INDIP. $a(1, 2) + b(3, -1) = (0, 0)$

$$\begin{cases} a+3b=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+3b=0 \\ -7b=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix} \quad \uparrow \quad \text{ok.}$$

GENERATORI 1° modo: usando la definizione

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ esistono x e y (per ora incogniti) tali che

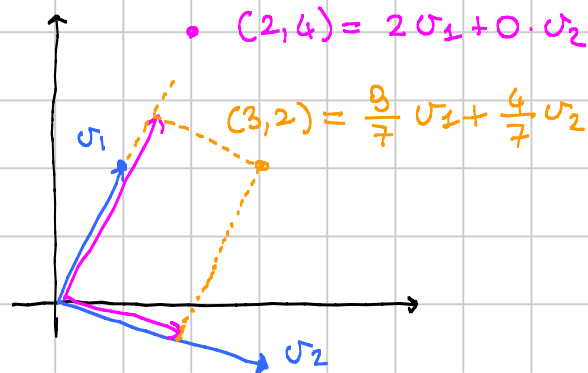
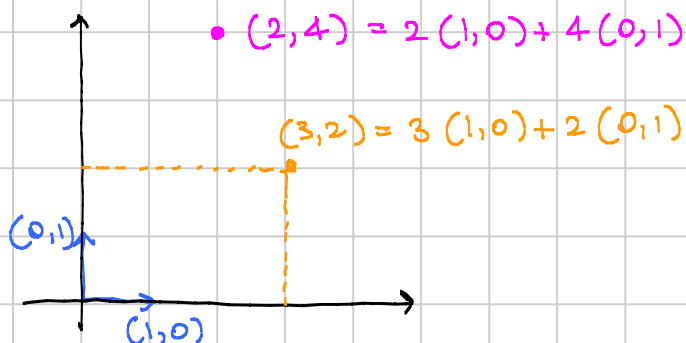
$$x(1, 2) + y(3, -1) = (a, b) \quad \begin{cases} x+3y=a \\ 2x-y=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=a \\ -7y=b-2a \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{conetto dopo} \end{matrix} \quad \boxed{y = -\frac{b-2a}{7}} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = a - 3y = a + \frac{3}{7}(b-2a)}$$

Dati a e b , riesco a trovare x e y , quindi generano!

2° modo $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2. Se v_1 e v_2 sono lin. indip., allora sono automaticamente una base, ed in particolare generatori.
— o — o —

Interpretazione geometrica della base $(1, 2)$, $(3, -1)$



A mano: scrivo $(3,2)$ come combinazione lineare di $(1,2)$ e $(3,-1)$

$$(3,2) = x(1,2) + y(3,-1)$$

$$3 = x + 3y$$

$$2 = 2x - y$$

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

$$x + 3y = 3$$

$$-7y = -4$$

$$\underline{-0 \quad -0 \quad -}$$

$$x = 3 - 3y = 3 - \frac{12}{7} = \frac{9}{7}$$

$$y = \frac{4}{7}$$

$$\underline{-0 \quad -0 \quad -}$$

Esercizio 2 Verificare che $(1,3,2)$, $(2,1,-1)$, $(1,0,7)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione: sono 3 elementi, $\mathbb{R}^3$ ha dim. 3, quindi se dimostro che sono lin. indep. automaticamente saranno una base.

$$a(1,3,2) + b(2,1,-1) + c(1,0,7) = (0,0,0)$$

$$a + 2b + c = 0$$

$$3a + b = 0 \quad \leadsto \text{risolvo} \leadsto \text{se viene } a=b=c=0, \text{ allora ok.}$$

$$2a - b + 7c = 0$$

$$\underline{-0 \quad -0 \quad -}$$

Esercizio 3 Dimostrare che x^2-1 , $x+3$, x^2+2x sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ = polinomi di grado ≤ 2 .

1° fatto dim di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ è 3 e una base è $1, x, x^2$.

Devo fare 2 verifiche

① Sono lin. indep.: $a+bx+cx^2$ = polinomio nullo $\Leftrightarrow a=b=c$.

② Sono generatori: ogni pol. di grado ≤ 2 è comb. lin. di $1, x, x^2$.

(Oss.: in generale $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ ha dimensione $k+1$ e una base è $1, x, x^2, \dots, x^k$)

Per l'esercizio 3 basta quindi dire che sono lin. indip.:

$$a(x^2-1) + b(x+3) + c(x^2+2x) = 0 \leftarrow \text{polinomio nullo.}$$

$$(a+c)x^2 + (b+2c)x + (-a+3b) = 0$$

$$a+c=0$$

$$b+2c=0$$

$$-a+3b=0$$

$\rightarrow$ risolvo e se l'unica soluzione è $a=b=c=0$

allora sono lin. indip. dunque (essendo lo stesso numero della dimensione) sono una base.

— 0 — 0 —

Esercizio 4 Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = (1, 0, -1) \quad v_2 = (3, 2, 1) \quad v_3 = (1, 2, 3)$$

Determinare la dimensione di $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$

Oss.1 Se fossero lin. indip., sarebbero una base, quindi il loro span sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$.

$$a(1, 0, -1) + b(3, 2, 1) + c(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$$

$$a + 3b + c = 0$$

$$2b + 2c = 0$$

$$-a + b + 3c = 0$$

$$1 \ 3 \ 1 \ | \ 0$$

$$0 \ 2 \ 2 \ | \ 0$$

$$-1 \ 1 \ 3 \ | \ 0$$

$$1 \ 3 \ 1 \ | \ 0$$

$$0 \ 2 \ 2 \ | \ 0$$

$$0 \ 4 \ 4 \ | \ 0$$

$$1 \ 3 \ 1 \ | \ 0$$

$$0 \ 2 \ 2 \ | \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ | \ 0$$

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$a = -c - 3b = 2c$$

$$b = -c$$

c libero

Quindi i vettori v_1, v_2, v_3 sono lin. dip. . Ad esempio con $c=1$

$$a=2 \quad b=-1;$$

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

Quindi posso ricavare ogni vettore in funzione degli altri:

$$v_2 = 2v_1 + v_3$$

Quindi $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Span}\{v_1, v_3\}$ perché posso sempre sostituire v_2 con una comb. lin. di v_1 e v_3 .

Ora se v_1 e v_3 sono lin. indip., allora sono una base perché generano lo span.

Per vedere che sono lin. indip. potrei impostare il sistema, oppure osservare che non sono uno multiplo dell'altro

(se fossero lin. dip. avrei $av_1 + bv_3 = 0$, cioè $v_1 = -\frac{b}{a}v_3$)

Conclusione: span ha dimensione 2 e una base è $\{v_1, v_3\}$

Osservazione Altre basi erano $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_2, v_3\}$.

Infatti posso eliminare v_1 esprimendolo come $v_1 = \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$ e posso eliminare v_3 in modo analogo.

Esercizio 5 Dimostrare che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

sono una base di $M_{2 \times 2}$, ed esprimere $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ come comb. lin. di v_1, v_2, v_3, v_4 .

Si tratta di scrivere $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$

Viene fuori un sistema 4×4 . Per dimostrare che sono una base, basta controllare la lineare indip. (dim $M_{2 \times 2} = 4$).