

Spazi e sottosp. vettoriali, vettori linearmente indipendenti, generatori, basi.

Def. Un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ si dice lin. indep. se

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$$

Si dice che è un sistema di generatori per V se

$$\forall v \in V \quad \exists a_1, \dots, a_m \in K \quad \text{t.c.} \quad v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

Si dice che è una base se è lin. ind. e genera V .

Teorema Se $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ è una base, allora ogni $v \in V$ si scrive

$$\text{in modo unico come comb. lineare} \quad v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

↑ ↑
unici

Def. Dato un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ si indica con $\text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$ l'insieme di tutti i vettori di V che sono combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_m$.

Fatto facile ① $\text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$ è un sottospazio vettoriale di V , cioè è chiuso rispetto a somma e prodotto per costante

Verifica

$$w_1 = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

$$w_2 = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$$

Allora

$$w_1 + w_2 = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_m + b_m) v_m \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$$

Analogamente

$$\lambda w_1 = \lambda (a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = (\lambda a_1) v_1 + \dots + (\lambda a_m) v_m$$

② $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono generatori se e solo se
 $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}.$

Esempio $V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (1, 1)$. Allora $\text{span}\{v_1\} =$ tutti i vettori
 multipli di v_1
 = retta $y = x$



Teorema di esistenza della base

Supponiamo che in uno sp. vett. V esista un insieme finito di generatori. Allora esiste anche una base.

Teorema (proprietà delle basi)

Supponiamo che in uno spazio vettoriale V esista una base. Allora valgono i seguenti fatti.

- ① Tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi.

Questo numero si chiama DIMENSIONE dello spazio vettoriale.

- ② Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_k\}$ sia un sistema di generatori (finito).

Allora posso eliminare un po' di elementi in modo che quelli che restano siano una base.

- ③ Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_k\}$ siano linearmente indipendenti.

Allora posso aggiungere un po' di elementi in modo che tutti insieme formino una base.

Teorema MISTERIOSO (Teorema di sostituzione)

Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_m\}$ siano linearmente indipendenti e che $\{w_1, \dots, w_n\}$ siano generatori.

Allora valgono 2 fatti:

- ① $m \leq n$

- ② Posso sostituire m elementi dell'insieme $\{w_1, \dots, w_n\}$ con gli m elementi $v_1, \dots, v_m$ e avere ancora un sistema di generatori.

— o — o —

Dim. (esistenza della base) Ipotesi: $\{w_1, \dots, w_n\}$ generano V .

Considero tutti i possibili sottoinsiemi di $\{w_1, \dots, w_n\}$. Alcuni di questi sottoinsiemi saranno ancora generatori, altri magari no. Tra tutti i sottoinsiemi che sono ancora generatori, prendo quello (o uno di quelli) che ha il minor numero di elementi.

Sia questo $v_1, \dots, v_k$. Dico che questi sono una base.

Che generino è banale. Resta da verificare che sono lin. indep.

Supponiamo per assurdo che non lo siano. Allora esiste

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$$

con i coeff. non tutti nulli. Supponiamo, a meno di cambiare i nomi, che $a_1 \neq 0$. Allora posso ricavare v_1 in funzione degli altri

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \frac{a_3}{a_1} v_3 - \dots - \frac{a_k}{a_1} v_k$$

Ma allora $\{v_2, \dots, v_k\}$ sono ancora generatori, ma allora ho trovato un sistema di generatori con meno elementi.

Perché $\{v_2, \dots, v_k\}$ sono ancora generatori?

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_k v_k = b_1 \left(-\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_k}{a_1} v_k \right) + b_2 v_2 + \dots + b_k v_k$$

quindi quello che potevo scrivere usando $v_1, \dots, v_k$ lo posso scrivere usando solo $v_2, \dots, v_k$.

— o — o —

Dim. proprietà delle basi

② Appena dimostrato: basta eliminare il maggior numero possibile di elementi,

① Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ siano 2 basi.

↓
lin. ind.

generatori

↓
generatori

lin. indip.

Teo. mist.

$\Rightarrow$

$$m \leq n$$

Teo. mist.

$\Rightarrow$

$$m \leq m$$

$$m = m$$

③ Siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ lin. indip. e sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base

↓
lin. indip.

↓
generatori

Teo. mist. $\Rightarrow k \leq n$ e posso sostituire un po' di w con i v

avendo ancora un sistema di generatori: $\{v_1, \dots, v_k + \text{sopravvissu-} \text{ti tra i w}\}$
in totale n elem.

Perché questi ultimi sono lin. indep.?

Se non lo fossero, per il punto ② potrei eliminare un po' di elementi ed ottenere una base, che però avrebbe meno di n elementi, il che è contro il punto ①.

— o — o —

Aggiunte al teo. con proprietà della base

④ Se $\dim V = n$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono lin. indep., allora sono una base

⑤ Se $\dim V = n$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono generatori, allora sono una base.

(se no potrei aggiungere / togliere elementi in maniera da ottenere una base con un numero di elementi $\neq n$).