

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 13

Titolo nota

16/10/2013

Esempio 1 Sia $K = \mathbb{R}$ e sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Siano

$$v_1 = x^2 + 3$$

$$v_2 = x - 1$$

$$v_3 = x^2 + x$$

Domanda: v_1, v_2, v_3 sono lin. indep.? Considero una loro combinazione lineare ed impongo che sia 0, cioè il polinomio nullo (quello con tutti i coeff. = 0).

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$$

$$a(x^2 + 3) + b(x - 1) + c(x^2 + x) = 0$$

$$(a+c)x^2 + (b+c)x + (3a-b) = 0$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \\ 3a-b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \\ -b-3c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \\ -2c=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \\ \rightarrow c=0 \end{matrix}$$

L'unica soluzione è $a=b=c=0$, quindi i vettori sono lin. indep.
Questo vuol dire che non posso scrivere nessuno dei 3 polinomi come combinazione lineare degli altri 2.
— 0 — 0 —

Come faccio per... stabilire se un po' di vettori sono lin. indep. oppure no?

→ scrivo una loro comb. lineare con coeff. incogniti e le impongo di essere il vettore nullo

→ risolvo il sistema lineare che viene fuori

→ se l'unica soluzione è quella con tutte le variabili nulle, allora i vettori sono lin. indep. In caso contrario sono lin. dep.

— 0 — 0 —

Esempio 2 $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i vettori

$$v_1 = (1, 0, 0) \quad v_2 = (0, -5, 0) \quad v_3 = (0, 0, 2)$$

Dico che sono un sistema di generatori, cioè che ogni $v \in \mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 .

Prendo un generico $v = (a, b, c)$. Allora

$$v = a(1, 0, 0) + \left(-\frac{b}{5}\right)(0, -5, 0) + \frac{c}{2}(0, 0, 2)$$

Esempio 3 Come sopra

$$v_1 = (1, 0, 0) \quad v_2 = (0, -5, 0) \quad v_3 = (0, 0, 2) \quad v_4 = (1, 1, 1)$$

Sono un sistema di generatori? Banalmente sì! Ogni vettore (a, b, c) è combinazione lineare dei primi 3, quindi è anche comb. lineare dei primi 4 (basta che metta coeff. = 0 a v_4 !!)

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + \left(-\frac{b}{5}\right)(0, -5, 0) + \frac{c}{2}(0, 0, 2) + 0 \cdot (1, 1, 1)$$

Esempio 4 I vettori dell' esempio 2 sono lin. indip. ? sì!

Prendo una comb. lin. generica e impongo che faccia 0:

$$a(1, 0, 0) + b(0, -5, 0) + c(0, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

$$(a, -5b, 2c) = (0, 0, 0) \Rightarrow a = b = c = 0$$

Quindi v_1, v_2, v_3 sono lin. indip. e sono generatori, quindi sono una BASE di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 5 I vettori $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

sono una base di $\mathbb{R}^3$ (verifica immediata).

Si chiama BASE CANONICA

Altri esempi di base

posizione k

① In $\mathbb{R}^n$ considero $e_k = (0, \dots, 0, \underset{\downarrow}{1}, 0, \dots, 0)$

② In $M_{2 \times 2}$ una base è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questo dice che sono generatori. Per avere la Lineare indep.

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $a=b=c=d=0$.

③ Una base in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ è $x^3, x^2, x, 1$

Teorema Supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ sia una base di uno spazio vettoriale V . Allora ogni elemento $v \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$, cioè $\forall v \in V$ esistono unici $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Dim. Poiché $v_1, \dots, v_n$ sono generatori esiste almeno un modo di scrivere v come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.

Devo dimostrare che il modo è unico. Supponiamo che ci siano 2 modi di farlo

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

$$\text{Ma allora } (a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \dots + (a_n - b_n) v_n = 0$$

Poiché $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono lin. indep., e poiché la comb. lin. di sopra è $= 0$, allora tutti i coeff. sono nulli, cioè

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0, \text{ cioè}$$

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

Esempio Considero un sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - w = 0 \\ x - y + 2z + w = 0 \\ \quad y + 2w = 0 \\ x + z + w = 0 \end{cases} \quad x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posso sempre pensarlo come combinazione lineare a coeff. incogniti di un po' di vettori colonna dati. Questi vettori colonna sono le colonne della matrice associata al sistema.

Quindi un sistema LINEARE OMOGENEO ha

- solo la soluzione con tutte le variabili nulle se e solo se le colonne sono linearmente indipendenti.
— 0 — 0 —

Consideriamo un sistema 3×3 NON omogeneo

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x - y = 2 \\ x + y + z = -3 \end{cases} \quad x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Sto cercando di scrivere la colonna dei termini noti come comb. lineare delle colonne della matrice dei coeff. Quindi

- ① Se le colonne della matrice dei coeff. sono un sistema di generatori, allora esiste almeno una soluzione qualunque sia la colonna dei termini noti.
- ② Se le colonne sono una base, allora la soluzione esiste ed è unica per ogni colonna dei termini noti.