

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 12

Titolo nota

16/10/2013

Esempio 1 $K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}_{\leq 4} [x]$
= polinomi a coeff. reali di grado ≤ 4

Gli elementi di V sono del tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

V non solo è uno spazio vettoriale, ma è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

Esempio 2 I polinomi di grado ≤ 4 sono un sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 4} [x]$?
NO!! Non è detto che la somma abbia lo stesso grado. Ad es.:

$$v = x^4 + 3x^3 + x + 1 \quad w = -x^4 + x^2 + 1$$

La somma $v+w$ non ha grado 4, ma solo ≤ 4 .

Esempio 3 $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ e prendiamo

$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0 \}$$

Domanda: W è un sottospazio? Faccio le 2 verifiche

(i) Prendo $(x_1, y_1) \in W$ e $(x_2, y_2) \in W$. La somma sta ancora in W ?

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \text{ Controllo}$$

$$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = \underbrace{2x_1 + 3y_1}_0 + \underbrace{2x_2 + 3y_2}_0 = 0 + 0,$$

perché $(x_1, y_1) \in W$ perché $(x_2, y_2) \in W$

(ii) Prendo $(x_1, y_1) \in W$, prendo $a \in \mathbb{R}$ e controllo se $a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1) \in W$

$$2(ax_1) + 3(ay_1) = a(2x_1 + 3y_1) = 0$$

perché $(x_1, y_1) \in W$.

Esempio 4 $K = \mathbb{R}$, $V = M_{2 \times 2}$

$$W = \left\{ A \in M_{2 \times 2} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

W = insieme delle matrici 2×2 che moltiplicate per $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ danno la matrice nulla.

W è un sottospazio? Sì!

(i) Prendo $A_1 \in W$ e $A_2 \in W$. Allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_1 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $A_1 + A_2 \in W$.

(ii) Prendo $A_1 \in W$ e $a \in K$. Allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (aA_1) = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_1 = a \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $aA_1 \in W$.

Esempio 5 $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, W = primo quadrante

(i) La somma di 2 elementi di W sta ancora in W

(ii) il prodotto di un elemento $w \in W$ per un numero $a \in \mathbb{R}$ sta ancora in W se e solo se $a \geq 0$.

Se $a < 0$ non è vero.

Quindi W NON è un sottospazio vettoriale.



Oss. Si può dimostrare che i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono solo

- tutto $\mathbb{R}^2$
 - $\{0\}$ = il sottospazio che contiene solo l'origine
 - tutte le rette passanti per l'origine.
- } sottospazi banali

Def. 1 Sia V uno spazio vettoriale, e siano $v_1, \dots, v_m$ elementi di V . Una combinazione lineare è una scrittura del tipo

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_m$$

comb. lineare di $v_1, \dots, v_m$ con coefficienti $a_1, \dots, a_n$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono elementi di K .

Def. 2 I vettori $v_1, \dots, v_m$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se l'unica loro combinazione lineare che fa 0 è quella con tutti i coefficienti nulli, cioè se

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_m = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = 0$$

↑
sta in V

↑
sta in K

Def. 3 I vettori $v_1, \dots, v_m$ sono un sistema di generatori di V se ogni elemento di V si scrive come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_m$, cioè se

$$\forall v \in V \exists a_1, \dots, a_n \in K \text{ t.c. } v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_m$$

Def. 4 I vettori $v_1, \dots, v_m$ costituiscono una BASE di V se

(1) Sono linearmente indipendenti

(2) Sono un sistema di generatori.

Def. 5 Si dice che uno spazio vettoriale ha DIMENSIONE FINITA se ammette un insieme finito $v_1, \dots, v_m$ di generatori.

Esempio 1 Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$(1, 2, 1)$$

$$(1, 1, -1)$$

$$(3, 4, -1)$$

Sono linearmente indipendenti?

Impongo che una loro combinazione lineare faccia $\textcircled{0}$ vettore

$$a(1, 2, 1) + b(1, 1, -1) + c(3, 4, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ 2a + b + 4c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases}$$

prima componente

seconda $\sim$

terza componente

$$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ -b - 2c = 0 \\ -2b - 4c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

c è libero, $b = -2c$, $a = -b - 3c = 2c - 3c = -c$

Quindi la soluzione generale è: $(-c, -2c, c)$. Ad esempio posso prendere $c = -1$, $a = 1$, $b = 2$

Quindi c'è una soluzione in cui i coeff. non sono tutti nulli.

Quindi i vettori NON sono linearmente indipendenti, cioè sono LINEARMENTE DIPENDENTI, cioè

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a}}{1}(1, 2, 1) + \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{2}(1, 1, -1) + \underset{\substack{\uparrow \\ c}}{-1}(3, 4, -1) = (0, 0, 0)$$

Volendo questo dice che "posso ricavare uno dei 3 vettori in funzione degli altri", ad esempio

$$(3, 4, -1) = (1, 2, 1) + 2(1, 1, -1)$$

$$(1, 1, -1) = \frac{1}{2}(3, 4, -1) - \frac{1}{2}(1, 2, 1)$$