

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 11

Titolo nota

16/10/2013

Strutture algebriche astratte :

- GRUPPO
- GRUPPO COMMUTATIVO
- ANELLO
- MODULO
- CORPO
- CAMPO
- SPAZIO VETTORIALE

Un campo (di numeri) è un insieme K (talvolta anche indicato con $\mathbb{F}$) sul quale sono definite due operazioni binarie (cioè funzioni che prendono in input 2 elementi e restituiscono un elemento) che di solito si indicano con $+$ e $\cdot$, che soddisfano le seguenti proprietà:

$$(S1) \quad a+b = b+a \quad \forall a \in K, \forall b \in K$$

commutativa

$$(S2) \quad a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a \in K, \forall b \in K, \forall c \in K$$

associativa

$$(S3) \quad \exists 0 \in K \text{ t.c. } a+0 = (0+a) = a \quad \forall a \in K$$

esist. el. neutro per $+$

$$(S4) \quad \forall a \in K \exists b \in K \text{ t.c. } a+b = 0$$

esist. el. opposto

$$(P1) \quad a \cdot b = b \cdot a \quad \forall \dots$$

$$(P2) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall \dots$$

stessi nomi di sopra

$$(P3) \quad \exists 1 \in K \text{ t.c. } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$$

riadattati

$$(P4) \quad \forall a \in K \text{ con } a \neq 0 \exists b \in K \text{ t.c. } ab = 1$$

$$(D) \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a \in K, \forall b \in K, \forall c \in K$$

Distributiva

Esempi classici $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$. $\leftarrow$ Considereremo sempre questi.
sono campi

$\mathbb{Z}$ non è un campo (manca la $(P4)$)

$\mathbb{N}$ non è un campo (mancano $(S4)$ e $(P4)$)

Definizione Sia V uno spazio vettoriale su un campo K .

Un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice sottospazio vettoriale se

- (i) $\forall v \in W, \forall w \in W$ si ha che $v+w \in W$ (chiuso rispetto alla somma, cioè la somma di 2 elementi di W sta ancora in W)
- (ii) $\forall a \in K, \forall v \in W$ si ha che $av \in W$ (chiuso rispetto al prodotto per elementi di K , cioè se $w \in W$ allora tutti i multipli di w stanno in W).

Oss.1 Se W è un sottospazio vettoriale, allora è chiuso rispetto alle combinazioni lineari, cioè se w_1 e w_2 stanno in W e $a_1 \in K$ e $a_2 \in K$, allora

$$\begin{array}{ccc} a_1 w_1 + a_2 w_2 \in W & & \\ \downarrow \quad \downarrow & & \text{perché sono multipli} \\ \text{sta in } W \quad \text{sta in } W & & \\ \downarrow & & \\ \text{la somma sta in } W. & & \end{array}$$

Oss.2 Se W è un sottospazio vettoriale, allora W è a sua volta uno spazio vettoriale, considerando somma e prodotto "ereditati" da V .

Esempio 2 L'insieme $M_{m \times n}$ delle matrici $m \times n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni di

- somma di matrici
- prodotto di una matrice per un numero.

Dovrei verificare le 8 proprietà, che sono sostanzialmente ovvie.

In particolare, $\boxed{0}$ è la matrice nulla, cioè quella con tutti $\odot$
 $\uparrow$ come elemento di V $\uparrow$ numero, cioè elemento di K

Data una matrice $v \in M_{m \times n}$, l'inversa rispetto alla somma, cioè la matrice w t.c. $v+w = \odot$ è la stessa con tutti gli el. cambiati di segno.
 $\uparrow$ matrice nulla

Esempio 3 $K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}[x] =$ insieme dei polinomi a
coeff. reali
 $= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

L'insieme di tutti i polinomi è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni

- somma tra 2 polinomi
- prodotto tra un numero (elemento di K) ed un polinomio.

Esempio 4 $K = \mathbb{R}$ $V =$ funzioni $f: \underbrace{[a, b]}_{\text{intervallo}} \rightarrow \mathbb{R}$

è uno spazio vettoriale rispetto a:

- somma tra funzioni
- prodotto di una funzione per un numero.

Osservazione In molti degli esempi precedenti, in V sono definite anche altre operazioni, ma ai fini della def. di spazio vettoriale non sono rilevanti, cioè non entrano nella definizione.