

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 10

Titolo nota

11/10/2013

Come faccio per ...

[4] ... trovare un vettore perpendicolare a 2 vettori dati?

$$\underline{(1, -1, 2)}, \quad \underline{(-2, 2, -2)}$$

$V \qquad \qquad W$

1° modo Chiamo (a, b, c) questo vettore ed impongo che i 2 prodotti scalari vengano 0:

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ -2a + 2b - 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = b \\ c = 0 \end{matrix}$$

Quindi le soluzioni sono $(a, a, 0)$, ad esempio $(1, 1, 0)$

2° modo Uso la FORMULA MISTERIOSA: se

$$V = (x_1, y_1, z_1) \quad W = (x_2, y_2, z_2)$$

allora un vettore perpendicolare sia a V sia a W è:

$$(y_1 z_2 - z_1 y_2, -x_1 z_2 + x_2 z_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Esercizio: verificare facendo i conti che effettivamente i 2 prodotti scalari vengono nulli.

Nell'esempio: $V = (1, -1, 2)$ $W = (-2, 2, -2)$. Allora

$$(a, b, c) = (2 - 4, +2 - 4, 2 - 2) = (-2, -2, 0)$$

che in effetti è un multiplo del vettore $(1, 1, 0)$ trovato prima.

Oss. Per passare dalla forma parametrica a quella cartesiana di un piano

- ① Trovo (a, b, c) a partire da v e w con la formula misteriosa
- ② Trovo d sostituendo un p.to qualunque.

⑤ ... dati 2 piani, stabilire se sono

- coincidenti
- distinti ma paralleli
- incidenti

Quando le eq. cartesiane: $ax+by+cz+d=0$ $\bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}z+\bar{d}=0$

- se sono l'una multipla dell'altra $\leadsto$ coincidenti
- se $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ è multiplo di (a, b, c) ma $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ NON è multiplo di (a, b, c, d) , allora sono distinti e paralleli.
- altrimenti sono incidenti.

Esempio

$$2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

$$3x + 6y - 9z + 12 = 0$$

$\frac{3}{2}$ precedente $\leadsto$ coincidenti

$$2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

$$3x + 6y - 9z + 11 = 0$$

$\frac{3}{2}$ precedente No $\frac{3}{2}$ precedente
 $\leadsto$ paralleli

$$2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

$$3x + 6y - 10z + 12 = 0$$

Non sono multipli $\leadsto$ incidenti

⑥ ... dati 2 piani che sappiamo essere incidenti, trovare la retta intersezione e l'angolo che formano.

Per la retta intersezione, basta mettere a sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z + 8 = 0 \\ 3x + 6y - 10z + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 3x + 6y - 10z = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ -z = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $z=0$ y libero $x=-4-2y$

$$z=0 \quad y=t \quad x=-4-2t$$

$$(-4-2t, t, 0) = \underbrace{(-4, 0, 0)}_{\text{p.to base della retta}} + t \underbrace{(-2, 1, 0)}_{\text{velocità della retta}}$$

Oss. Vedere cosa succede considerando x come variabile libera...

L'angolo tra 2 piani è uguale all'angolo tra i vettori ad esso perpendicolari, quindi l'angolo tra $ax+by+cz+d=0$ e $\bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}z+\bar{d}=0$

è uguale all'angolo tra (a,b,c) e $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$

Per determinare l'angolo tra 2 vettori uso

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \theta$$

Nell'esempio $(a,b,c) = (2,4,-6)$ o meglio $(a,b,c) = (1,2,-3)$
e $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (3,6,-10)$

Quindi $\cos \theta = \frac{3 + 6 \cdot 2 + (-10) \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2 + (-10)^2}} \leftarrow \text{prod. scalare}$

- ☐ ... data una retta ed un piano, stabilire se la retta
- sta sul piano
 - è parallela al piano
 - è incidente al piano (ed in tal caso determinare il punto di intersezione e l'angolo che formano).

Supponiamo di avere il piano in forma cartesiana: $ax+by+cz+d=0$
e la retta in forma parametrica $\vec{P}_0 + t\vec{V}$

Esempio

$$2x + 3y - z + 5 = 0$$

$$(2, 1, 3) + t(1, -1, 2)$$

Scrivo la retta come $(\underset{\text{"x"}}{2+t}, \underset{\text{"y"}}{1-t}, \underset{\text{"z"}}{3+2t})$

Sostituisco nell'equazione del piano e trovo

$$2(2+t) + 3(1-t) - (3+2t) + 5 = 0 ; 4 + \cancel{2t} + 3 - \cancel{3t} - 3 - \cancel{2t} + 5 = 0$$

$$-3t + 9 = 0 \quad t = 3$$

Brutalmente: un punto che si muove lungo la retta passa per il piano (cioè ne verifica l'equazione) solo per $t=3$

Quindi sono incidenti ed il punto di intersezione è $(2+3, 1-3, 3+2 \cdot 3)$
 $(5, -2, 9)$

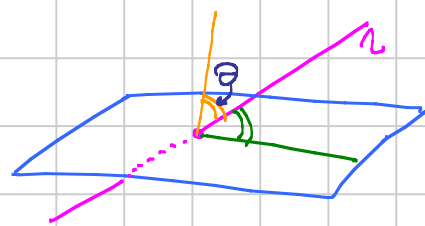
Se invece se ne andava da t non il termine noto, restava un'eq. del tipo $0 \cdot t = \text{numero} \neq 0$ che non ha solus. $\Rightarrow$ parallela

Se se ne andava tutto e restava $0 \cdot t = 0$, allora la retta stava sul piano

E per l'angolo?

Quello che è facile trovare è l'angolo

θ tra la retta e la perpendicolare al piano:



basta fare l'angolo tra il vettore (a, b, c) perpendicolare al piano e la direzione v della retta.

[?] Stabilire se 2 rette sono coincidenti, parallele, incidenti, sghembe.

— o — o —