

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 09

Titolo nota

11/10/2013

Geometria nello spazio Come faccio per...

- 1 ... stabilire se 3 punti nello spazio sono allineati (stanno sulla stessa retta).

$$P_1 = (1, 2, 3)$$

$$P_2 = (2, 1, 5)$$

$$P_3 = (-1, 4, -1)$$

1° modo Scrivo l'eq. della retta per P_1 e P_2 e controllo se P_3 ci appartiene

Retta per P_1 e P_2 : $P_1 + t(P_2 - P_1)$ in forma parametrica

$$\underbrace{(1, 2, 3)}_{P_1} + t \underbrace{(1, -1, 2)}_{P_2 - P_1}$$

Vedo se esiste un valore di t per cui la retta passa per P_3

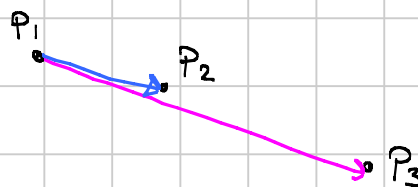
$$(1, 2, 3) + t(1, -1, 2) = (-1, 4, -1)$$

$$(1+t, 2-t, 3+2t)$$

$$\begin{cases} 1+t = -1 & t = -2 \\ 2-t = 4 & t = -2 \\ 3+2t = -1 & t = -2 \end{cases}$$

La retta passa per P_3 , quindi P_1, P_2, P_3 sono allineati.

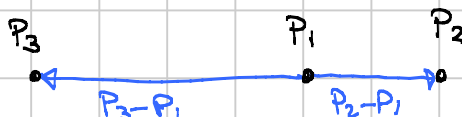
2° modo Controllo se i vettori $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$ sono "allineati", cioè uno multiplo dell'altro



$$P_2 - P_1 = (1, -1, 2)$$

$$P_3 - P_1 = (-2, 2, -4)$$

$P_3 - P_1$ è uguale a $P_2 - P_1$ moltiplicato per -2 , quindi i 3 punti sono allineati.

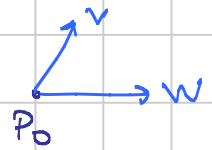
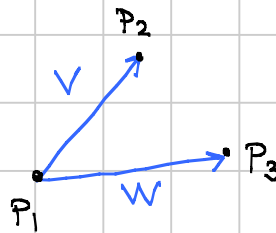


2) --, scrivere l'equazione del piano che passa per 3 punti dati
 P_1, P_2, P_3 **NON** allineati

1° modo Se voglio ottenere l'equazione parametrica

$$P_0 + tV + sW$$

$$P_1 + t(P_2 - P_1) + s(P_3 - P_1)$$



2° modo Se voglio l'equazione in forma cartesiana
 sostituisco i 3 punti nell'equazione e ottengo
 un sistema di 3 equazioni in 4 incognite.

$$ax + by + cz = d$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Supponiamo di cercare l'eq. nella forma $ax + by + cz + d = 0$

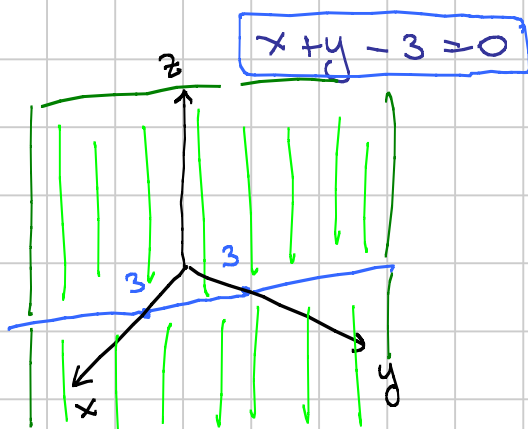
$$P_1 = (1, 2, 3) \quad P_2 = (2, 1, 5) \quad P_3 = (-1, 4, 1)$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0 \\ 2a + b + 5c + d = 0 \\ -a + 4b + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0 \\ -3b - c - d = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= -2b - d = \frac{2}{3}d - d = -\frac{1}{3}d \\ b &= -\frac{1}{3}c - \frac{1}{3}d = -\frac{1}{3}d \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Solus. sistema: $a = -\frac{1}{3}d$, $b = -\frac{1}{3}d$, $c = 0$, d qualunque

Per comodità prendo $d = -3$ e ottengo $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, in conclusione



→ Non dipende da z , quindi è un piano "verticale" che sul piano base xy taglia la retta $x + y - 3 = 0$

[3] ... passare dalla forma parametrica alla forma cartesiana,

Nell'esempio precedente $P_1 + t(P_2 - P_1) + s(P_3 - P_1)$
 $(1, 2, 3) + t \underbrace{(1, -1, 2)}_V + s \underbrace{(-2, 2, -2)}_W$

[1° modo] Do dei valori a t ed s in modo da ottenere 3 punti del piano e poi procedo come sopra... (ad es: $t=0, s=0$, $t=1, s=0$, $t=0, s=1$)

[2° modo] Il piano è dato da $(\underbrace{1+t-2s}_x, \underbrace{2-t+2s}_y, \underbrace{3+2t-2s}_z)$

Sostituisco nell'eq. generale $ax + by + cz + d = 0$

$$a(1+t-2s) + b(2-t+2s) + c(3+2t-2s) + d = 0$$

$$\underbrace{(a+2b+3c+d)}_0 + t \underbrace{(a-b+2c)}_0 + s \underbrace{(-2a+2b-2c)}_0 = 0$$

e ho un sistema di 3 equazioni in 4 incognite (risolvere per esercizio!)

Lemma Supponiamo che un'espressione

$$\text{Mostro}_1 + \text{Mostro}_2 \cdot t + \text{Mostro}_3 \cdot s = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ogni $s \in \mathbb{R}$. Allora per forza $\text{Mostro}_1 = \text{Mostro}_2 = \text{Mostro}_3 = 0$

[Dim.] Metto $t=0, s=0 \leadsto \text{Mostro}_1 = 0$
 $t=1, s=0 \leadsto \text{Mostro}_2 = 0$
 $t=0, s=1 \leadsto \text{Mostro}_3 = 0$

3° modo Il vettore (a, b, c) è un vettore perpendicolare al piano quindi basta che trovi un vettore perpendicolare.
Quindi devo trovare un vettore (a, b, c) che sia $\perp$ sia a V sia a W (V e W sono i 2 vettori che "generano" il piano).

Nell'esempio $V = (1, -1, 2)$ $W = (-2, 2, -2)$

Così facendo trovo (a, b, c) e mi manca d , che posso trovare sostituendo nell'equazione un qualunque p.to del piano, ad esempio il p.to base P_0 .