

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 07

Titolo nota

09/10/2013

$$\begin{cases} x+y-z+2u+v=2 \\ x+y-z+u-v=0 \\ x+y-z-u-2v=0 \\ x+y-z+4u+2v=2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{-1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} \\ \rightarrow 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

L'ultima riga, essendoci 0 anche tra i termini noti, è come se non ci fosse.

Ho infinite soluzioni e posso assegnare a piacere le variabili corrispondenti a colonne senza pivot, cioè y e z

$$\begin{aligned} x+y-z+2u+v &= 2 \\ -u-2v &= -2 \\ 3v &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

LIBERI

$$x = 2 - \boxed{y+z} - 2u - v$$

trovo u $\uparrow$ $\downarrow$ li conosco e li sostituisco

Esempio 2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \textcircled{3} & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} 3x+y+4u+2v &= 1 \\ 2z+v &= 4 \\ 3v &= 1 \end{aligned}$$

trovo x con y e u liberi $\uparrow$
trovo z $\uparrow$
 $\rightarrow$ trovo v $\uparrow$

Ultima osservazione

Lavorando alla Gauss posso portare la matrice in forma a scala, e questo basta per risolvere i sistemi.

Continuando a lavorare alla Gauss, potrei mettere tutti zeri anche SOPRA i pivot.

Ad esempio posso trasformare la matrice di sopra come segue:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 3 \cdot 1^a - 2 \cdot 3^a \\ \leftarrow 3 \cdot 2^a - 3^a \\ \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \end{array}$$

Se faccio l'ultrametodosso, non cambiano nessuno i PIVOT.

Esercizio 1 Trovare, nel piano, l'intersezione tra la retta $y = 3x + 1$ e la retta $2x - 3y + 5 = 0$.

Si tratta di risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

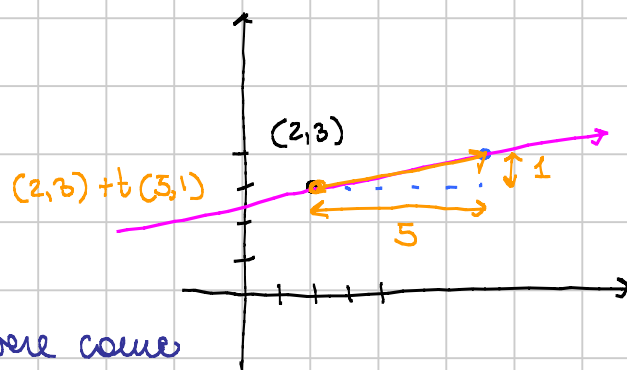
$$\begin{cases} 3x - y = -1 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \quad \text{e da qui si risolve.}$$

Esercizio 2 Trovare l'intersezione tra la retta $y = 3x + 1$ e la retta $(2, 3) + t(5, 1)$

↑ eq. esplicita

↓ eq. parametrica

1° modo Trasformo in forma esplicita l'eq. parametrica



2° modo L'eq. parametrica la posso scrivere come $(\underbrace{2 + 5t}_x, \underbrace{3 + t}_y)$

Cerco il valore di t per cui x e y stanno sulla 1° retta, cioè risolvo

$$y = 3x + 1;$$

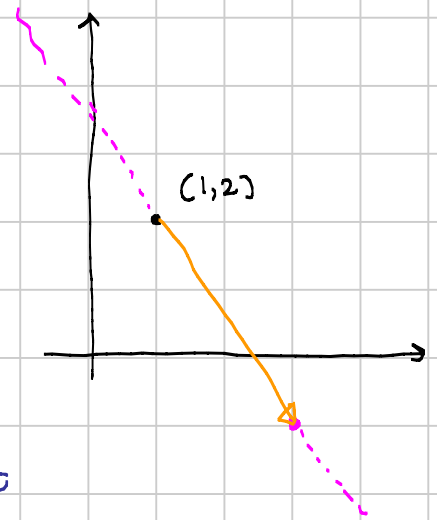
$$3 + t = 3(2 + 5t) + 1; \quad 3 + t = 6 + 15t + 1; \quad 14t = -4; \quad t = -\frac{2}{7}$$

$$x = 2 + 5t = 2 - \frac{10}{7} = \dots$$

$$y = 3 + t = 3 - \frac{2}{7} = \dots$$

Esempio Come passare dalla forma parametrica $\vec{P}_0 + t \vec{V}$ alla forma cartesiana $ax + by + c = 0$.
Poniamo che la retta data sia $(1, 2) + t(2, -3)$

1° modo Sostituisco 2 valori a t (ad esempio $t=0$ e $t=1$), ottengo 2 p.ti della retta, nel nostro caso $t=0 \rightarrow (1, 2)$
 $t=1 \rightarrow (3, -1)$,
e scrivo l'eq. della retta per 2 p.ti



2° modo Impongo che il p.to $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 3t$ verifichi l'eq. $ax + by + c = 0$

$$a(1 + 2t) + b(2 - 3t) + c = 0 ; \quad a + 2at + 2b - 3bt + c = 0 ;$$
$$(a + 2b + c) + (2a - 3b)t = 0 \quad \text{questa deve essere vera per ogni } t,$$

quindi è che i coeff. siano nulli

$$\begin{cases} 2a - 3b = 0 \\ a + 2b + c = 0 \end{cases} \quad \text{Non resta che trovare } a, b, c$$

$$a = \frac{3}{2}b ; \quad \frac{3}{2}b + 2b + c = 0 ; \quad 3b + 4b + 2c = 0 ; \quad 7b = -2c$$

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2}b \\ 7b = -2c \end{cases} \quad \text{Fisso } c \text{ come mi pare, ad esempio } c = 1, \text{ e ottengo}$$
$$b = -\frac{2}{7} \quad \text{e} \quad a = \frac{3}{2}b = -\frac{3}{7}. \quad \text{Quindi l'eq. è}$$

$$-\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + 1 = 0$$

3° modo La velocità v , che è il vettore che descrive la DIREZIONE della retta, è $(2, -3)$. Nell'equazione $ax + by + c = 0$, il vettore (a, b) è un vettore PERPENDICOLARE alla retta, quindi perpendicolare a $(2, -3)$. Un vettore perpendicolare a $(2, -3)$ è $(3, 2)$ (il prodotto scalare fa 0), quindi posso usare $a = 3$ e $b = 2$, quindi l'eq. è del tipo

$3x + 2y + c = 0$, Come trovo c ? Sostituendo il pto iniziale della retta, cioè $(1, 2)$:

$$3 + 4 + c = 0 \rightarrow c = -7 \rightarrow 3x + 2y - 7 = 0$$

4° modo (geometrico) $(1, 2) + t(2, -3)$
 $\uparrow$
 x_0, y_0

L'eq. della retta per un punto (x_0, y_0) è $(y - y_0) = m(x - x_0)$
 $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 2 $-\frac{3}{2}$ 1

m dipende unicamente dalla direzione della retta

quindi $m = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

5° modo (algebrico) $x = 1 + 2t$ $y = 2 - 3t$ eliminiamo la t

$t = \frac{1}{2}(x - 1)$ dalla 1ª equazione. Poi sostituisco nella 2ª:

$$y = 2 - \frac{3}{2}(x - 1)$$

— o — o —