

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE

Titolo nota

09/10/2013

Sistemi lineari (n-visitati)

m equazioni del tipo. L'i-esima equazione è qualcosa del tipo

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n = b_i$$

In forma compatta si può scrivere come $Ax = b$ dove

$A = (a_{ij})$ è la matrice dei coeff., $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle incognite e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ è il vettore colonna dei termini noti.

Algoritmo di Gauss: trasforma il sistema in un sistema equivalente (con le stesse soluzioni), sperabilmente più semplice.

Operazioni consentite:

① $R_i \leftrightarrow R_j$

② $R_i \rightsquigarrow a R_i + b R_j$

$\rightarrow a=1$ (versione ultraribodossa)
 $\rightarrow a \neq 0$ (versione generalizzata)

Le operazioni si possono fare direttamente sulla matrice, $[MA]$ devo ripetere le stesse operazioni anche sulla colonna dei termini noti.

Più comodamente, costruisco una matrice "aggiungendo ad A la colonna dei termini noti" e poi opero alla Gauss su quella $\bar{A} = (A | b)$

Esempio

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ x - y - z = 5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -3y - 3z = 7 \\ 2z = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{e si} \\ \text{risolve} \end{matrix}$$

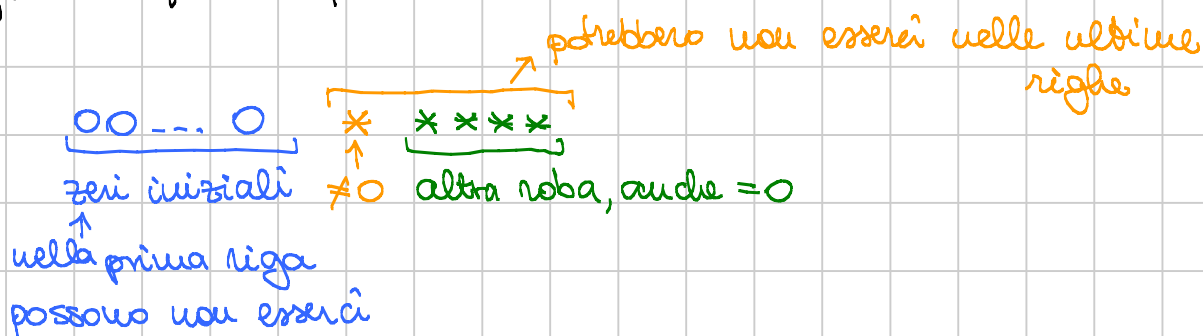
Osservazione L'algoritmo di Gauss è la classica sostituzione.

Se io dalla prima equazione ricavo x : $2x = -y - z - 3$

$$x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}$$

Se vado a sostituire nella 2ª e nella 3ª ottengo un nuovo sistema in cui non c'è più la x . È lo stesso ottenuto con Gauss in versione ultrarapida.

Obiettivo dell'alg. di Gauss è portare il sistema nella forma A SCALA: ogni riga è di questo tipo


zeri iniziali
nella prima riga possono non esserci
potrebbero non esserci nelle ultime righe
altri no, anche = 0

Ogni riga ha un numero di zeri iniziali maggiore (anche più di uno) della riga precedente.

Notazione: il primo termine non nullo di una data riga si chiama PIVOT.

Esempio
$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 4 \\ 4x - y + 5z = 5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \end{array} \right) \text{ matrice completa}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ -3y + 7z &= 6 \\ 0 &= -5 \end{aligned}$$

Il sistema è impossibile, la matrice A (solo la matrice A) ridotta a scala è

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad 0 = \text{PIVOT}$$

Quadro generale. Se tutte le righe della matrice A ridotta a scala hanno il PIVOT, allora di sicuro il sistema ammette soluzione.

Caso particolare: prendiamo un sistema $n \times n$

- ① Se tutte le righe della matr. A a scala hanno il PIVOT, allora il sistema ha soluzione UNICA (dall'ultima eq. trovo x_n , poi dalla penultima trovo x_{n-1} , e così via).
- ② Se una o più righe in fondo non hanno il pivot, allora bisogna vedere i corrispondenti termini noti
 - ②.1 Se uno dei corrispondenti termini noti è $\neq 0$, vuol dire che una delle eq. è del tipo $0 = \text{numero} \neq 0$ e il sistema non ha soluzione
 - ②.2 Se tutti i corrispondenti termini noti sono $= 0$, vuol dire che il sistema ha infinite soluzioni nel senso che c'è almeno una variabile che posso assegnare a piacere e trovare di conseguenza le altre.

Esempio

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 4 \\ 4x - y + 5z = 10 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ -3y + 7z &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Posso assegnare liberamente z :

$$z = a$$

$$-3y = 6 - 7a \quad y = -2 + \frac{7}{3}a$$

$$\begin{aligned} 2x &= -y + z + 2 = 2 - \frac{7}{3}a + a + 2 \\ &= 4 - \frac{4}{3}a \end{aligned}$$

Tradotto: $x = 4 - \frac{4}{3}a$ $y = -2 + \frac{7}{3}a$ $z = a$

risolve il sistema per ogni valore di a .

— 0 — 0 —

Lo stesso discorso vale per sistemi $m \times n$:

- ① Se tutte le colonne (cioè tutte le incognite) hanno pivot $\neq 0$ e non ci sono righe nulle in fondo, allora c'è soluzione unica
- ② Se ci sono righe nulle in fondo, bisogna vedere i termini noti corrispondenti
- ③ Quando ci sono infinite soluzioni, posso assegnare liberamente tutte le variabili senza pivot.