

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 5

Titolo nota

04/10/2013

MATRICI Una matrice è una tabella rettangolare di numeri

Esempio

$$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{riga 1} \\ & \leftarrow \text{riga 2} \end{array}$$

Si indica con $M_{m \times n}$ l'insieme delle matrici con m righe e n colonne.

La matrice dell'esempio sta in $M_{2 \times 3}$.

Gli elementi di una matrice si indicano con a_{ij}
 $\downarrow$ riga i , colonna j .

Nell'esempio $a_{22} = \frac{1}{2}$ $a_{2,3} = 4$ $a_{3,2}$ NON ESISTE

Operazioni tra matrici

* Somma di matrici : si può fare tra matrici con le stesse dimensioni e si fa termine a termine.

Più formalmente: $A \in M_{m \times n}$ $A = \{a_{ij}\}$
 $B \in M_{m \times n}$ $B = \{b_{ij}\}$

Allora

$$A+B = \{a_{ij} + b_{ij}\}$$

* Prodotto di una matrice per un numero : si fa moltiplicando tutti gli elementi per quel numero.

Formalmente: $A \in M_{m \times n}$ $A = \{a_{ij}\}$
 $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = \{\lambda a_{ij}\} \in M_{m \times n}$$

Casi speciali di matrice

- $m = 1$ si ottengono i vettori riga, del tipo $(1 \ 7 \ -5 \ 4) \in M_{1 \times 4}$
- $n = 1$ si ottengono i vettori colonna, del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 1}$
- $m = n = 1$ è un numero singolo $(\sqrt{2}) \in M_{1 \times 1}$

Trasposta di una matrice: data una matrice $A \in M_{m \times n}$, si definisce trasposta di A la matrice $A^t \in M_{\boxed{n \times m}}$
la matrice ottenuta scambiando
tra di loro le righe e le colonne di A .
Formalmente: $A = \{a_{ij}\}$ $A^t = \{a_{ji}\}$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{-5} \\ \boxed{6} & \boxed{7} & \boxed{3} \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{6} \\ \boxed{1} & \boxed{7} \\ \boxed{-5} & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Occhio: talvolta la trasposta si può trovare indicata A^T , $^T A$, $^t A$.

PRODOTTO TRA MATRICI

Siano date due matrici $A \in M_{m \times n}$
 $B \in M_{n \times k}$

IMPORTANTE: colonne della
prima = righe della 2^a

Il prodotto di A e B è la matrice

$$C = AB \in M_{m \times k}$$

così definita:

$$\text{se } A = \{a_{ij}\} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

$$B = \{b_{ij}\} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k \end{matrix}$$

allora

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Esempio 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$

Posso fare AB ? No! Colonne $1^a \neq$ Righe 2^a

Posso fare $B \cdot A$? Si! Colonne $1^a (B) =$ Righe $2^a (A)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & \boxed{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 19 & 24 \\ 32 & 43 & 54 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 4$ $2 \cdot 2 + 3 \cdot 5$ $2 \cdot 3 + 3 \cdot 6$

Detto altrimenti, l'elemento C_{ij} del prodotto, si ottiene facendo una specie di prodotto scalare tra la riga i -esima della 1^a e la colonna j -esima della seconda.

Osservazione Le matrici quadrate si possono sempre moltiplicare per se stesse (anzi solo le sde con questa proprietà)

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & \boxed{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & \boxed{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 27 \\ 36 & 61 \end{pmatrix} = B^2$$

Caso speciale Posso moltiplicare una matrice $A \in M_{m \times n}$ per un vettore colonna $v \in M_{n \times 1}$

Otengo come risultato un altro vettore colonna

$$Av \in M_{m \times 1}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$$

A v

Esempio

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{5} \\ \boxed{1} & \boxed{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x} \\ \boxed{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ x - 3y \end{pmatrix}$$

FLASH BACK

La parte sx di un sistema lineare è il prodotto tra una matrice di numeri (i coeff. del sistema) ed un vettore colonna di incognite.

La parte dx di un sistema lineare è un vettore colonna di numeri (i termini noti).

La matrice ha

- tante righe quante sono le equazioni
- tante colonne quante sono le incognite, cioè tante quante le righe del vettore colonna delle incognite

Esempio

$$2x + 3y + 5z = -1$$

$$x - y + 2z = 3$$

$$3x - 2y + z = 4$$

Lo posso scrivere come $A \vec{x} = \vec{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Una matrice a scala è una matrice in cui tutte le righe dopo la 1^a hanno degli zeri iniziali. Ogni riga ha almeno uno zero in più della riga precedente.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —