

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 04

Titolo nota

04/10/2013

Sistemi lineari $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ 2 equazioni - 2 incognite : x, y

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 6 \\ x - y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad 3 \text{ equazioni in 3 incognite : } x, y, z$$

In generale si possono considerare sistemi di m equazioni in n incognite : $x_1, x_2, \dots, x_n$. Le singole equazioni devono contenere solo somme di multipli delle incognite, cioè devono essere del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \leftarrow \text{termine noto}$$

COMBINAZIONE LINEARE

delle incognite: si intende che $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono numeri dati

Nomenclatura Un sistema lineare (m eq., n incognite) si dice

- OMOGENEO se tutti i termini noti sono $= 0$
- NON OMOGENEO se almeno un termine noto è $\neq 0$.

Esempi $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4y + 6 + 3y = 4 \\ x = 2y + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 7y = -2 \\ x = 2y + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{7} \\ x = -\frac{4}{7} + 3 = \frac{17}{7} \end{cases}$

Il sistema ammette soluzione UNICA $(x, y) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{17}{7}\right)$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases} \rightsquigarrow 2x = 4 - 3y \quad \text{sostituisco nella 2}^a$$
$$\underbrace{8 - 6y}_{2x} + 6y = 7 \quad \boxed{8 = 7}$$

Il sistema NON ha soluzioni !!! Si poteva vedere subito!

$4x + 6y$ è il doppio di 4, ma 7 non è il doppio di 4.

$$\begin{cases} 2x - y = 8 \\ -4x + 2y = -16 \end{cases} \quad \leadsto \quad y = 2x - 8 \quad \text{sostituisco nella 2ª e ottengo}$$

$$-4\cancel{x} + \boxed{4\cancel{x} - 16} = -16 \quad \text{2y} \quad -16 = -16$$

Quindi la 2ª equazione è soddisfatta purché lo sia la prima (si vede subito: la 2ª eq. è la 1ª moltiplicata per -2).

Il sistema ammette INFINITE soluzioni, e sono tutte le coppie (x, y) tali che $y = 2x - 8$ (nel piano cartesiano sarebbe una retta).

Detto ancora meglio, l'insieme delle soluzioni dipende da un parametro libero:

$$(x, y) = (t, 2t - 8)$$

t è il parametro e per ogni $t \in \mathbb{R}$ la coppia $(t, 2t - 8)$ risolve il sistema.

Riassumendo: sono apparse 3 possibilità

- soluzione unica
- nessuna soluzione
- infinite soluzioni dipendenti da 1 o più parametri

ALGORITMO DI GAUSS

Obiettivo: come trasformare un sistema qualunque in un sistema più semplice con le stesse soluzioni.

Operazioni permesse:

- ① Scambiare tra di loro 2 equazioni
- ② Sostituire una equazione R_i (pensata come riga i -esima) con $a R_i + b R_j$ con $a \neq 0$

Esempio

$$\begin{array}{ll} R_j & 2x + 3y - 5z = 2 \\ R_i & x - 2y + 3z = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 2x + 3y - 5z = 2 \\ \rightarrow \boxed{3} \cdot R_j + \boxed{2} R_i \rightarrow 8x + 5y - 9z = 16 \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $b \quad a$

$$\boxed{3}(2x + 3y - 5z) + \boxed{2}(x - 2y + 3z) = \boxed{3} \cdot 2 + \boxed{2} \cdot 5$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $b \quad a \quad b \quad a$

Ci sono 2 versioni dell'algoritmo di Gauss:

* versione generale: posso usare ogni $a \neq 0$ e ogni $b \in \mathbb{R}$

* versione ultraortodossa: devo usare $a = 1$ e b a scelta.

Fatto importante Utilizzando le operazioni ① e ② il sistema viene trasformato in un sistema con le stesse soluzioni

Dim. $\begin{cases} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{①}} \begin{cases} R_j = 0 \\ R_i = 0 \end{cases}$ non può cambiare nulla

$$\begin{cases} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{②}} \begin{cases} a R_i + b R_j = 0 \\ R_j = 0 \end{cases}$$

Se è verificato il 1°, allora è verificato il 2°.

Se è verificato il 2°, allora $R_j = 0$, ma allora $a R_i = 0$, ma allora $R_i = 0$ (qui è decisivo avere che $a \neq 0$).

— 0 — 0 —

Esempio

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 4 \rightarrow 2^a - 2 \cdot 1^a \\ x + y - z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -5y - 4z = -6 \\ x + y - z = -2 \rightarrow 3^a - 1^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -5y - 4z = -6 \\ -y - 4z = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -y - 4z = -7 \\ -5y - 4z = -6 \rightarrow 3^a - 5 \cdot 2^a \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -y - 4z = -7 \\ 16z = 29 \end{cases}$$

Da qui si risolve immediatamente

$$z = \frac{29}{16} \quad -y = 4z - 7 = \frac{29}{4} - 7 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$$

$$x = -2y - 3z + 5 = \frac{1}{2} - \frac{87}{16} + 5 = \frac{8 - 87 + 80}{16} = \frac{1}{16}$$

L'obiettivo che si può sempre raggiungere con l'algoritmo di Gauss è di portare il sistema in una forma A SCALA:

→ nella prima equazione ci possono essere tutte le variabili

→ nelle equazioni successive, c'è sempre almeno una variabile in meno che nella precedente,

Esempio

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 5 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rightsquigarrow 2^a - 3 \cdot 1^a \\ \rightsquigarrow 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -y + 8z = 5 \\ -3y + 6z = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rightsquigarrow 3^a - 3 \cdot 2^a \\ \rightsquigarrow -18z = -9 \end{array}$$

$$z = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}, \quad y = 8z - 5 = 4 - 5 = -1, \quad x = 3z - y = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{5}{2} \right).$$

— 0 — 0 —