

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 03

Titolo nota

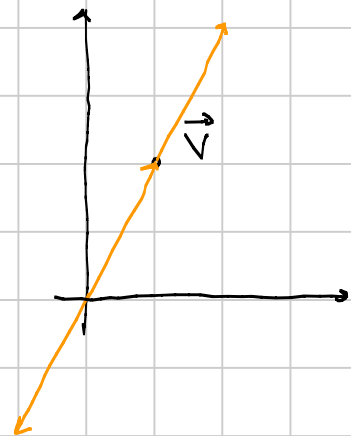
02/10/2013

Utilizzo geometrico dei vettori nel piano

Situazione semplice Dato $\vec{V}$ vettore nel piano, cosa rappresenta $t\vec{V}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$?

Se $\vec{V} \neq \vec{0}$ $\leftarrow$ vettore nullo (origine)

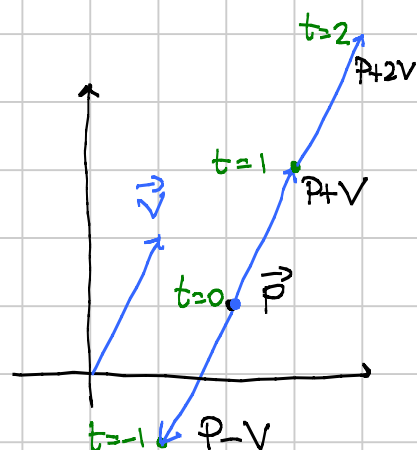
ottengo tutta la retta passante per l'origine la cui direzione è descritta da $\vec{V}$.



Brutalmente, posso pensare ad un omio che al tempo t si trova nel punto $t\vec{V}$ (l'omio percorre la retta).
Il vettore $\vec{V}$ è la velocità (costante) dell'omio.

Altro esempio: cosa rappresenta

$\vec{P} + t\vec{V}$ al variare di t
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $\in \mathbb{R}$
2 vettori dati



$$t=0 \rightsquigarrow \vec{P}$$

$$t=1 \rightsquigarrow \vec{P} + \vec{V}$$

$$t=2 \rightsquigarrow \vec{P} + 2\vec{V}$$

Brutalmente, posso pensare ad un omio che al tempo $t=0$ sta in P e poi si muove lungo la retta passante per P con velocità data dal vettore $\vec{V}$.

Oss. Tutto questo si può pensare in coordinate

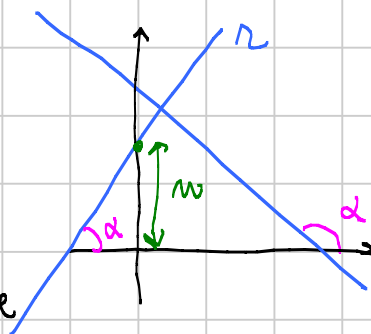
$$\vec{P} = (x_1, x_2)$$

$$\vec{P} + t\vec{V} = (x_1 + tv_1, x_2 + tv_2)$$

$$\vec{V} = (v_1, v_2)$$

Equazioni di una retta (modi di descrivere una retta)

① $y = mx + n$ $m = \tan \alpha$
= coeff. angolare



Vantaggi:

→ m ed n sono determinati univocamente dalla retta (per ogni retta c'è un solo m ed un solo n possibile)

Svantaggi:

→ questa eq. non descrive le rette // asse y .

② $ax + by + c = 0$ Vantaggi:

→ tutte le rette hanno eq. di questo tipo

Svantaggi:

→ a, b, c non sono univoc. determinati (posso moltip. tutto per $\lambda \neq 0$)

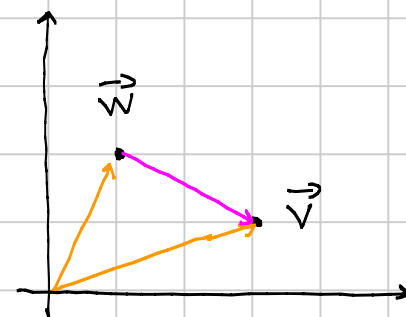
→ a o b devono essere NON entrambi nulli

③ $\vec{P} + t\vec{V}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ con $\vec{P}$ e $\vec{V}$ vettori dati

Ancora una volta $\vec{P}$ e $\vec{V}$ non sono univocamente determinati, ma così si descrivono tutte le rette

Descrizione di un segmento

Serve un punto che per $t=0$ sta in $\vec{W}$ e poi si muove nella direzione congiungente



In formula:

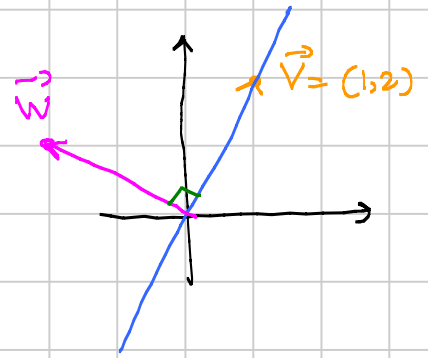
$$\vec{W} + t(\vec{V} - \vec{W}) \quad t \in [0, 1]$$

$t=0$ no $\vec{W}$ Al tempo t abbiamo percorso la frazione t della strada

Più in generale $\vec{W} + t(\vec{V} - \vec{W}) \quad t \in \mathbb{R}$ rappresenta la retta
passante per $\vec{V}$ e $\vec{W}$ ($\neq \vec{V} \times \vec{W}$)

Esempio 1 (retta per l'origine) $y = 2x$

In forma vettoriale $\vec{V} = (1, 2)$
la retta è $t\vec{V} = (t, 2t)$
 $x = t$
 $y = 2t$



Altro modo: $-2x + y = 0$ $\vec{W} = (-2, 1)$
 $\vec{Q} = (x, y)$

L'equazione implicita $-2x + y = 0$ è equivalente a

$$\langle \vec{W}, \vec{Q} \rangle = 0$$

fisso $\vec{W}$ $\vec{Q}$ generico p.to della retta

Questo dice che il generico punto Q della retta è perpendicolare a $\vec{W}$.

Più in generale: una retta per l'origine ha un'eq. del tipo

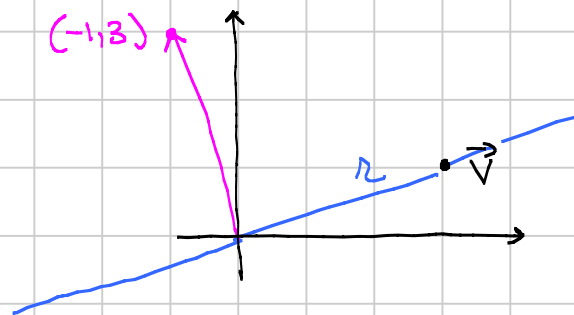
$$ax + by = 0$$

Questa si può vedere come prodotto scalare tra $\vec{W} = (a, b)$ ed
il vettore $\vec{Q} = (x, y)$. Quindi i p.ti della retta sono tutti e soli
i punti del piano che, pensati come vettori) sono $\perp$ a $\vec{W}$
— 0 — 0 —

Esempio 2 Consideriamo $\vec{V} = (3, 1)$ e la retta $t\vec{V}$.
Scrivere l'eq. negli altri modi

$$t\vec{V} = (3t, t) \quad x = 3t, y = t$$

$$y = \frac{1}{3}x$$



Un vettore $\perp$ ad (a, b) è $(-b, a)$. Il prodotto scalare diventa

$$a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$$

La retta è costituita da tutti i pti perpendicolari a $\vec{W} = (-1, 3)$, cioè i pti $\vec{Q} = (x, y)$ t.c. $\underbrace{-x + 3y}_{\vec{W} \cdot \vec{Q}} = 0$, cioè $y = \frac{1}{3}x$.

Esempio 3 Scrivere la retta passante per $(257, 126)$ e perpendicolare alla retta r di prima.

Devo pensare ad un punto che parte da $\vec{P} = (257, 126)$ al tempo $t=0$ e che si muove in direzione $\perp$ a $\vec{V}$, cioè in direzione $\vec{W} = (-1, 3)$.

$$\begin{aligned} \text{La retta diventa } \vec{P} + t\vec{W} &= (257, 126) + t(-1, 3) \\ &= (257 - t, 126 + 3t) \end{aligned}$$

$$\text{volendo } x = 257 - t \quad y = 126 + 3t.$$