

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 02

Titolo nota

02/10/2013

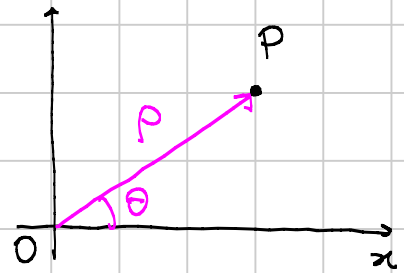
Piano cartesiano come vettori:

- somma
- prodotto di un vettore per un numero
- prodotto scalare $\rightarrow$ norma $\rightarrow$ distanza

Coordinate polari nel piano

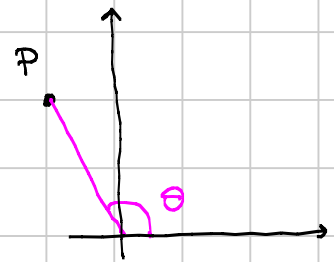
Un punto P si può univocamente determinare dati

- la sua distanza p dall'origine
(cioè la sua norma pensando come vettore)
- l'angolo θ che la retta $\vec{OP}$ forma con il semiasse positivo delle x .



Nota:

- $p \geq 0$ sempre e $p = 0$ se e solo se $P = O$
- θ è un angolo, quindi definito a meno di multipli di 2π
- Il θ di $P = O$ non è ben definito

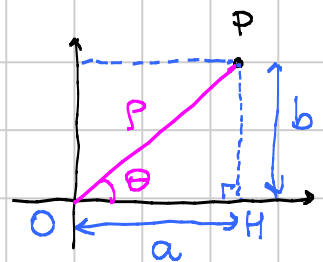


Formule di passaggio

1° caso Note le coordinate polari p e θ di P , come trovo le coordinate cartesiane a e b ?

$$a = p \cos \theta \quad b = p \sin \theta$$

Precorso nel triangolo rettangolo OPH



2° caso Note le coord. cartesiane a e b , come trovo p e θ ?

$$p = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pitagora!

θ : guardare il disegno!!!

$$a = p \cos \theta, \quad b = p \sin \theta \Rightarrow \boxed{\text{se}} \text{ posso dividere ottengo}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad \text{quindi} \quad \boxed{\tan \theta = \frac{b}{a}} \quad \text{se } a \neq 0$$

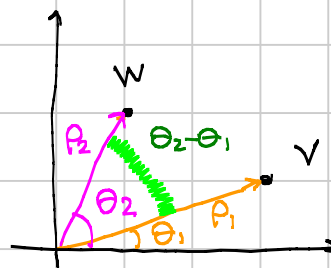
Come ricavare θ nota la sua tangente dipende dal quadrante in cui siamo (NON basta fare $\arctan$: vedi Analisi 1).

— o — o —

Significato geometrico del prodotto scalare (parte 1)

$$\vec{V} = (x_1, y_1) \quad \vec{W} = (x_2, y_2)$$

$$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$



Scrivo $\vec{V}$ e $\vec{W}$ in coordinate polari

$$\vec{V} = (p_1 \cos \theta_1, p_1 \sin \theta_1) \quad \vec{W} = (p_2 \cos \theta_2, p_2 \sin \theta_2)$$

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \vec{W} &= p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= p_1 p_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= p_1 p_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

PRE CORSO !!

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \|\vec{V}\| & \|\vec{W}\| \end{matrix}$$

In conclusione

$$\boxed{\vec{V} \cdot \vec{W} = \|\vec{V}\| \cdot \|\vec{W}\| \cdot \cos(\text{angolo compreso})}$$

Conseguenza Se $\vec{V} \cdot \vec{W} = 0$ allora ci sono 2 casi

① o uno dei 2 vettori è nullo

② o $\cos(\text{angolo compreso}) = 0$, cioè angolo $= \pm \frac{\pi}{2}$
cioè i 2 vettori sono perpendicolari

In particolare se $\vec{V} = \vec{W}$, allora angolo $= 0$, quindi $\vec{V} \cdot \vec{W} = \|\vec{V}\|^2$.

Il prodotto scalare è distributivo rispetto alla somma

$$\langle \vec{V} + \vec{W}, \vec{U} \rangle = \vec{V} \cdot \vec{U} + \vec{W} \cdot \vec{U}$$

Altra proprietà: $\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = \langle \vec{W}, \vec{V} \rangle$ (verificarla!)

$$\langle \vec{V} + \vec{W}, \vec{A} + \vec{B} \rangle = \langle \vec{V}, \vec{A} + \vec{B} \rangle + \langle \vec{W}, \vec{A} + \vec{B} \rangle$$

$$= \langle \vec{V}, \vec{A} \rangle + \langle \vec{V}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{W}, \vec{A} \rangle + \langle \vec{W}, \vec{B} \rangle$$

In particolare

$$\begin{aligned} \|\vec{V} + \vec{W}\|^2 &= \langle \vec{V} + \vec{W}, \vec{V} + \vec{W} \rangle \\ &= \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle + \underbrace{\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle + \langle \vec{W}, \vec{V} \rangle}_{\text{uguali}} + \langle \vec{W}, \vec{W} \rangle \\ &= \|\vec{V}\|^2 + 2\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle + \|\vec{W}\|^2 \end{aligned}$$

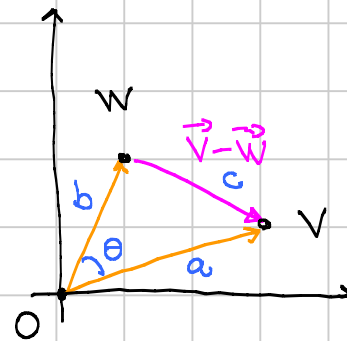
$$\|\vec{V} + \vec{W}\|^2 = \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{W}\|^2 + 2\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle$$

$$\|\vec{V} - \vec{W}\|^2 = \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{W}\|^2 - 2\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle$$

Interpretazione geometrica del prodotto scalare (parte 2)

Teorema di Carnot (teorema del coseno)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad \text{Preludio}$$



In linguaggio vettoriale:

$$\begin{aligned} \|\vec{V} - \vec{W}\|^2 &= \cancel{\|\vec{V}\|^2} + \cancel{\|\vec{W}\|^2} - 2\cancel{\|\vec{V}\|} \cdot \cancel{\|\vec{W}\|} \cdot \cos \theta \\ &= \cancel{\|\vec{V}\|^2} + \cancel{\|\vec{W}\|^2} - 2\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle \end{aligned}$$

Quindi

$$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = \|\vec{V}\| \cdot \|\vec{W}\| \cdot \cos \theta$$

Conseguenza 1

norme di un vettore

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot |\cos \theta| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

↑
valore assoluto di un numero

↑
norme di un vettore

Quindi

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Esercizio Esprimere il prodotto scalare in funzione della norma

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} [\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2]$$

Fare la verifica !!!