

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 01

Titolo nota

02/10/2013

- ① Uso dei vettori in geometria (geom. analitica)
- ② Sistemi lineari
- ③ Spazi vettoriali e applicazioni lineari
- ④ Prodotti scalari e forme quadratiche

MATRICI

PIANO CARTESIANO

I punti del piano cartesiano possono essere pensati come VETTORI.

A questo punto sono definite 2 operazioni

- somma di 2 vettori

$$\vec{V} = (x_1, y_1)$$

$$\vec{W} = (x_2, y_2)$$

$$\vec{V} + \vec{W} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

- prodotto di un vettore per un numero

$$\vec{V} = (x_1, x_2)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$
↑
numero reale

$$\lambda \vec{V} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

Significato geometrico:

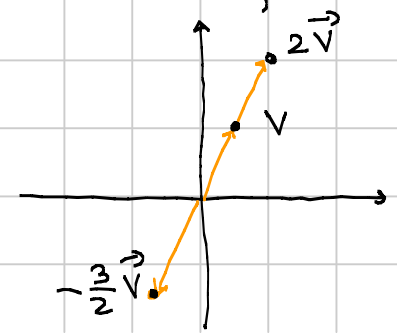
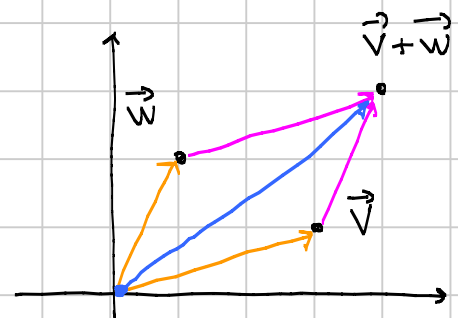
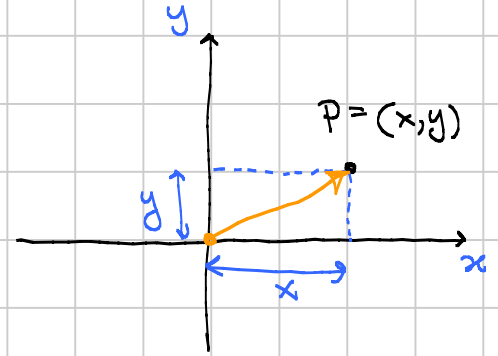
$$V = (3, 1)$$

$$W = (1, 2)$$

$$V + W = (4, 3)$$

- somma = regola del parallelogrammo

- prodotto per λ = moltiplicare per λ la lunghezza del vettore, conservando la direzione e invertendo o no il verso a seconda del segno di λ



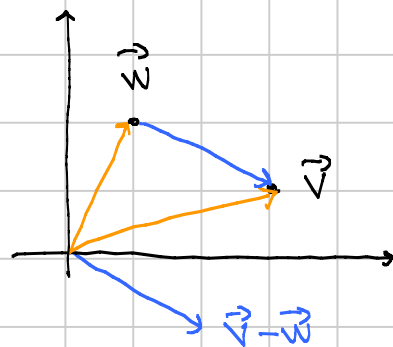
Differenza di 2 vettori

$$\vec{V} - \vec{W} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\ = \vec{V} + (-1)\vec{W}$$

$$\vec{V} = (3, 1) \quad \vec{V} - \vec{W} = (2, -1)$$

$$\vec{W} = (1, 2)$$

$$\vec{V} = \vec{W} + (\vec{V} - \vec{W})$$

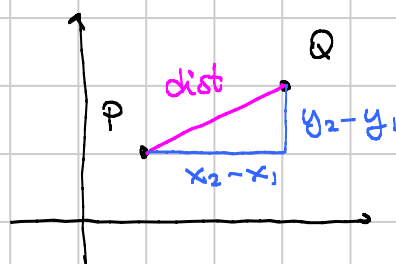


Distanza tra 2 punti (2 vettori)

$$P = (x_1, y_1)$$

$$Q = (x_2, y_2)$$

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



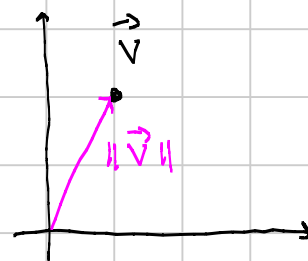
Norma di un vettore

$$\vec{V} = (x_1, y_1)$$

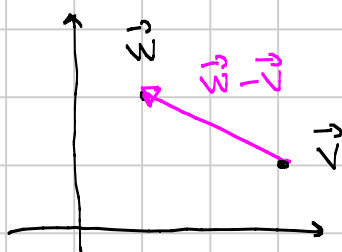
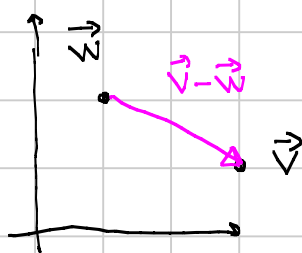
La norma di $\vec{V}$, che si indica con $\|\vec{V}\|$ o anche solo $|\vec{V}|$ è il numero (reale ≥ 0):

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

= lunghezza del vettore $\vec{V}$
pensato applicato nell'origine



Relazione fra norma e distanza



$$\text{dist}(\vec{V}, \vec{W}) = \|\vec{V} - \vec{W}\|$$

$$= \|\vec{W} - \vec{V}\|$$

La norma di un vettore $\vec{V}$
è sempre uguale alla norma
di $-\vec{V}$

Prodotto scalare

$$\vec{V} = (x_1, y_1)$$

$$\vec{W} = (x_2, y_2)$$

Si definisce prodotto scalare di $\vec{V}$ e $\vec{W}$, e si indica con $\vec{V} \cdot \vec{W}$ oppure $\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle$, il numero reale

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

INPUT: 2 vettori

OUTPUT: numero, cioè uno scalare.

Relazione tra norma e prodotto scalare

Sia $\vec{V} = (x_1, x_2)$. Allora

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle = x_1^2 + x_2^2 = \|\vec{V}\|^2$$

Esercizio

$$(\vec{V} + \vec{W}) \cdot \vec{U} = \langle \vec{V} + \vec{W}, \vec{U} \rangle$$

$$\vec{V} = (x_1, y_1)$$

$$\vec{V} + \vec{W} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\vec{W} = (x_2, y_2)$$

$$\vec{U} = (x_3, y_3)$$

$$(\vec{V} + \vec{W}) \cdot \vec{U} = (x_1 + x_2) \cdot x_3 + (y_1 + y_2) \cdot y_3$$

$$= x_1 x_3 + x_2 x_3 + y_1 y_3 + y_2 y_3$$

$$= \vec{V} \cdot \vec{U} + \vec{W} \cdot \vec{U}$$