DA THANOS AGLI ZOMBIES: DERIVATE E DINAMICHE DI POPOLAZIONE

MARCO GHIMENTI

SOMMARIO. Faremo un breve viaggio nei modelli della dinamica della popolazione, ovvero considereremo le equazioni che descrivono l'andamento del numero di individui di una popolazione al variare del tempo. Queste equazioni si chiamano "differenziali" perché contengono sia delle funzioni, sia le loro derivate. Dopo una introduzione più rigorosa, applicheremo quanto studiato a tre modelli presi dalla vita reale*: Thanos e le gemme dell'infinito; il buon momento di dare l'insetticida nei campi di granturco; come sopravvivere ad una apocalisse zombie.

*ok, QUASI presi dalla vita reale.

1. INTRODUZIONE

Il senso di questi incontri sta nell'asterisco qui sopra: per un matematico fa molta differenza studiare uno o l'altro dei modelli presentati nel sommario? Cosa vuol dire problema interessante in matematica? La matematica serve a spiegare il mondo (o serve a qualcosa, comunque)?

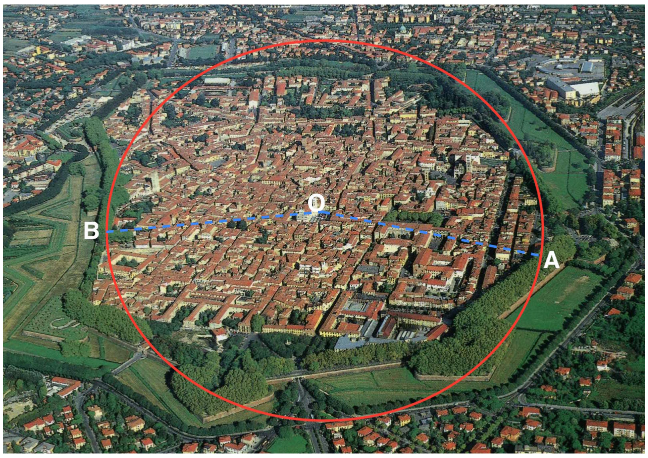
Ogni matematico probabilmente si è fatto o si è sentito porre le domande sopra, e nel corso degli anni ha sviluppato la sua personale risposta. La matematica poi si ramifica in tante discipline, dalle estremamente applicate, a quelle estremamente astratte, quindi le risposte alle domande sopra variano moltissimo a seconda delle persone. In questi incontri proviamo a dare una possibile risposta a queste domande, ma, soprattutto, cercheremo di capire cosa può essere un *buon* modello in matematica. Sorprendentemente, troveremo che i tre esempi presentati sono molto più simili, al di là del loro grado di aderenza al reale, di quel che possa sembrare a prima vista.

Iniziamo con un esempio.

Esercizio 1 (Muoversi a Lucca)**.** Lucca è una città che ha una cinta muraria interamente percorribile, quindi è molto facile spostarsi girando intorno alla città. Supponiamo poi di sapere molto bene raggiungere da ogni punto delle mura una piazza centrale (ad esempio tenendo di vista il campanile della chiesa per orientarsi) e di riuscire, altrettanto facilmente, da quella piazza centrale a raggiungere un qualsiasi punto sulle mura.

Presi due punti A e B sulle mura, per andare da A a B, conviene camminare lungo le mura o passare dal centro?

Modellizziamo il modello nel modo seguente: la città è un cerchio di raggio r e centro O. Muoversi sulle mura equivale a muoversi lungo la circonferenza, e andare verso la piazza centrale equivale a muoversi lungo un raggio verso il punto O. Per partire dal punto A sulla circonferenza, e raggiungere il punto B, sempre sulla circonferenza, abbiamo due scelte: o ci muoviamo lungo la circonferenza, o raggiungiamo il centro O e da lì torniamo verso il punto B. Ovviamente se A e B sono molto vicini conviene muoversi lungo la circonferenza, ma se i punti sono diametralmente opposti conviene passare dal centro. Quale è l'angolo $A\hat{O}B$ che fa da discriminante tra queste due situazioni?



Ovviamente l'angolo discriminante è quello per cui il segmento circolare AB ha la stessa lunghezza della somma delle lunghezze dei segmenti AO e OB, ovvero $2r$, e quindi, se esprimiamo l'angolo cercato in radianti, basta fare il rapporto tra la corda e il raggio, ovvero

$$A\hat{O}B = \frac{2r}{r} = 2.$$

L'angolo cercato quindi è di due radianti, che corrispondono a poco meno di 120°.

Analizziamo il modello che abbiamo scelto per il problema. Soffermiamoci su tre aspetti.

(1) Il modello è *plausibile*? Non molto: in una città tipicamente le strade non sono disposte a raggiera verso un punto centrale, semmai si intersecano tra loro ad angolo retto. Per fare un modello è necessario semplificare, ma in questo caso più che semplificare abbiamo stravolto il caso reale. Sarebbe stato più accurato prendere un cerchio con dentro una quadrettatura. Questo però avrebbe complicato il problema (non in maniera drammatica: sarebbe sempre stato possibile arrivare ad una soluzione usando un po' di teoremi sui triangoli rettangoli)

(2) Il modello è *robusto*, ovvero resiste a piccoli cambiamenti degli elementi in gioco? Questa è una caratteristica molto importante, perché più è flessibile la matematica che sta dietro ad un modello, più è possibile utilizzare lo stesso tipo di struttura in casi diversi. Purtroppo il nostro modello è molto *fragile*: se prendessimo un'ellisse invece di una circonferenza diventerebbe estremamente difficile calcolare la lunghezza di segmento ellittico staccato da un angolo dato.

(3) La matematica dietro il modello è *interessante*? Qui il nostro esempio eccelle: si capisce bene quanto possa essere naturale misurare gli angoli in radianti, e soprattutto è un esempio di angolo che non è multiplo o sottomultiplo di π. Spesso negli studi superiori si finisce di considerare π come l'unità di misura degli angoli radianti, e non come un numero reale, quindi questo è un ottimo esercizio da proporre quando si inizia a studiare la goniometria.

Vediamo già in questo semplice esempio che ci sono altri aspetti, oltre all'aderenza al reale, che per il matematico sono importanti. In particolare un buon modello in matematica deve avere dietro una struttura matematica sufficientemente interessante e sufficientemente flessibile. Studiare quel modello allora aiuta ad affinare la conoscenza matematica e può trovare applicazioni che chi ha inventato il modello neppure poteva immaginare.

Per fare un esempio illustre, Gaspard Monge ha inventato la teoria del trasporto ottimo per risolvere un problema di approvvigionamento di risorse dell'esercito napoleonico. Il modello era molto bello matematicamente, ed è stato molto studiato nel corso degli anni, fino a permettere, nel 2018, ad Alessio Figalli di vincere il trofeo più prestigioso della matematica, la Medaglia Fields, proprio usando i metodi del trasporto ottimo per risolvere problemi legati alla meteorologia!

2. La dinamica della popolazione

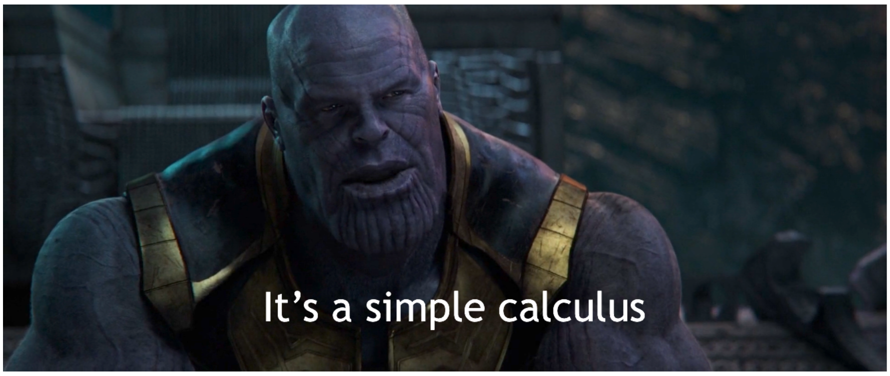


Figura 2.1. "È un semplice calcolo: questo universo è limitato, come le sue risorse. Se la vita venisse lasciata incontrollata, cesserebbe di esistere". Thanos, Avengers - Infinity War

Il film "Avengers - Infinity War" è stato un grande successo in tutto il mondo. Il protagonista è un gigante di nome Thanos che persegue i suoi scopi criminosi per tutto il film: vuole cancellare metà degli esseri viventi dell'universo per risolvere il problema della scarsità di risorse. Siamo sicuri che il calcolo che cita Thanos nel film sia così corretto?

Per capirlo, entriamo nel mondo delle equazioni differenziale e della dinamica delle popolazioni.

Un'equazione differenziale è un'equazione che coinvolge una funzione incognita e le sue derivate. Ad esempio, pensiamo al numero di individui di una popolazione come ad una funzione che dipende dal tempo $y(t)$. Il tasso di variazione di questa popolazione nel tempo è la derivata della funzione rispetto al tempo $y'(t)$. Ovviamente la popolazione varia a seconda del numero di nascite e del numero di morti ad un certo istante, e possiamo immaginare che questa variazione sia proporzionale al numero di individui presenti: più individui ci sono, maggiori sono le probabilità di accoppiamento, ed anche: più individui ci sono, più individui moriranno in un certo istante. Possiamo immaginare quindi che il tasso di variazione sia direttamente proporzionale al numero di individui $y(t)$, moltiplicato per un fattore di natalità α, e ad un fattore di mortalità ω, sempre moltiplicato $y(t)$. Quindi otteniamo

$$y'(t) = \alpha y(t) - \omega y(t).$$

Se consideriamo a il numero di individui all'istante iniziale $t = 0$ in cui cominciamo a considerare la nostra popolazione, l'equazione completa sarà

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) - \omega y(t) \\ y(0) = a. \end{cases} \tag{2.1}$$

Si vede facilmente che la soluzione di questa equazione è

$$y(t) = ae^{(\alpha-\omega)t},$$

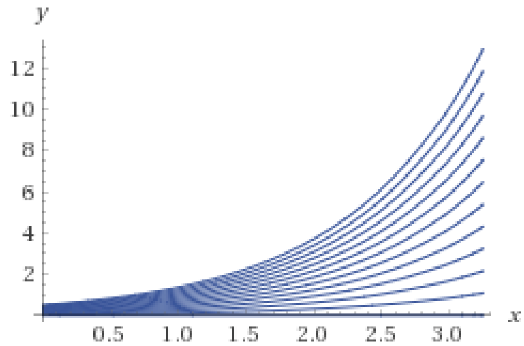


FIGURA 2.2. L'andamento delle soluzioni di (2.1)

quindi, se $\alpha > \omega$ (ovvero se è più probabile fare figli piuttosto che morire) il numero di individui cresce esponenzialmente!

Ora, in questa equazione abbiamo fatto molte semplificazioni: abbiamo considerato il numero di individui come una funzione reale e regolare, mentre gli individui sono un numero intero di persone. Questa però è una approssimazione molto ragionevole per popolazioni molto numerose.

Poi abbiamo immaginato che il tasso di natalità e mortalità siano indipendenti sia dal tempo, sia dal luogo dove si trovano gli individui. Questo va bene per una colonia di batteri, ma non è molto adatto per le popolazioni umane: basta pensare alla differenza, ad esempio, tra i tassi di natalità di India, Messico e Italia, o tra il numero di figli per famiglia e la durata di vita della nostra generazione rispetto a quella dei nostri nonni.

Anche in questo caso, se consideriamo le cose su scala abbastanza vasta, come fa Thanos, può essere una approssimazione ragionevole. Quindi, per quello che ci interessa, questo modello è sufficientemente plausibile.

Ma c'è una fattore che a Thanos -e a noi- sta molto a cuore e che per adesso non abbiamo ancora considerato: la scarsità delle risorse. La nostra popolazione modello è libera di riprodursi a piacimento, senza mai soffrire la fame. Se vogliamo convincere il nostro caro titano a non spazzare via metà universo, dobbiamo fornire un modello più convincente.

Vogliamo quindi aggiungere una correzione negativa che sia piccola quando ci sono pochi individui, perché in quel caso l'effetto della scarsità di risorse è trascurabile, e che diventi molto grande al crescere del numero di individui. Il modello più semplice è prendere qualcosa che sia proporzionale al quadrato del numero di individui. La nostra equazione allora diventa

$$y'(t) = (\alpha - \omega)y(t) - \sigma y^2(t)$$

dove più grande è il parametro σ, più gli effetti della scarsità di risorse sono drammatici. Questa equazione si chiama *logistica*. Il termine correttivo che abbiamo introdotto, ovvero $-\sigma y^2(t)$ è piuttosto arbitrario. Niente ci dice, a questo livello di analisi, che veramente questa scelta sia quella corretta, o se non sia meglio utilizzare un'altra funzione (una cubica, ecc.). Le strade sono due: o andiamo a verificare con gli esperimenti se l'ipotesi è plausibile, oppure verifichiamo a posteriori in che modo questa scelta influenza il comportamento delle soluzioni. Se il modello è sufficientemente stabile rispetto alla scelta di questo termine, ovvero se cambiando funzione l'andamento delle soluzioni non cambia, allora aver fatto questa scelta non influenza la validità del modello. In altri termini, se comunque scegliamo una funzione che sia piccola a zero e grande lontano da zero otteniamo risultati dello stesso tipo, a quel punto tanto vale scegliere, come abbiamo fatto, quella più semplice da trattare. Ecco perché il concetto di *robustezza* di un modello è così importante dal punto di vista del matematico.

Notiamo una cosa: la funzione costante $y(t) \equiv \frac{\alpha-\omega}{\sigma}$ è una soluzione dell'equazione, infatti in questo caso $y' = 0$ e $\frac{\alpha-\omega}{\sigma}$ è una soluzione di $(\alpha-\omega)y(t) - \sigma y^2(t) = 0$. Questa soluzione si chiama soluzione costante, o di *equilibrio*: se partiamo con $\frac{\alpha-\omega}{\sigma}$ individui all'istante iniziale, questo sarà esattamente il numero di individui per tutto il tempo. Anche la soluzione $y(t) \equiv 0$ è una soluzione costante. Queste soluzioni giocheranno un ruolo molto importante per capire il comportamento di questo modello.

Per addentrarci meglio nelle soluzioni di questo problema, dobbiamo adesso introdurre qualche risultato astratto, e cercare di capire come si risolvono alcuni tipi di equazioni differenziali.

Nel seguito, tutte le funzioni sono da considerarsi regolari, ovvero continue, derivabili e con derivata continua su tutto il dominio di definizione. Iniziamo con due risultati di cui non daremo dimostrazione.

Lemma 2. *Siano f e g due funzioni tali che $f' = g'$ su $\mathbb{R}$ e tali che esista un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ per cui $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$. Allora $f \equiv g$ su tutto $\mathbb{R}$.*

Teorema 3. *Si consideri il problema di Cauchy (ovvero il sistema equazione differenziale + dato iniziale)*

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = a \end{cases} \tag{2.2}$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione del problema (2.2), ed è unica.

Dati per buoni questi risultati, possiamo trovare una formula risolutiva per il problema (2.2). Vediamo come.

Proposizione 4. *Sia F una funzione tale che*

$$F' = \frac{1}{f}.$$

Allora se $y(t)$ è una soluzione non costante di (2.2), vale la seguente identità:

$$F(y(t)) = t + F(a). \tag{2.3}$$

Se la proposizione vale, allora per risolvere (2.2) possiamo cercare una F tale che $F' = 1/f$, scrivere (2.3), e da lì cercare una formula esplicita per $y(t)$. Si noti che, data l'unicità della soluzione, la soluzione che troviamo in questa maniera è l'unica soluzione esistente. Dimostriamo la proposizione e poi applichiamola ad un esempio che ci interessa.

Dimostrazione. Intanto per $t = 0$ la (2.3) diventa

$$F(y(0)) = 0 + F(a),$$

quindi, dato che $y(0) = a$ i membri destro e sinistro dell'equazione (2.3) sono uguali. Se deriviamo entrambi i membri della (2.3) abbiamo

$$\begin{aligned} F'(y(t))y'(t) &= 1 \\ \frac{1}{f(y(t))}y'(t) &= 1 \\ y'(t) &= f(y(t)) \end{aligned}$$

che è verificata perché la $y(t)$ risolve (2.2). Allora $F(y(t))$ e $t + F(a)$ sono uguali in zero, e con le derivate uguali dappertutto, quindi sono uguali e la (2.3) è verificata.

In realtà, quando deriviamo termine a termine la formula dobbiamo verificare che $f(y(t)) \neq 0$. Ma le uniche soluzioni per cui può succedere che $f(y(t)) = 0$ sono quelle costanti, che abbiamo escluso nelle ipotesi del teorema. □

Applichiamo la proposizione al nostro caso. Fissiamo, per non avere troppe costanti letterali, $(\alpha - \omega) = 1$ e $\sigma = 1/4$. Vogliamo quindi risolvere

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - \frac{1}{4}y^2(t) \\ y(0) = a \end{cases} \tag{2.4}$$

Abbiamo già visto che le due soluzioni costanti sono $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 4$. Siccome per il Teorema 3 due soluzioni di (2.4) non si possono incontrare, allora se $0 < a < 4$ avremo che $0 < y(t) < 4$ per tutti i tempi. Così come se $a > 4$ avremo che $y(t) > 4$ per ogni t. Inoltre, se $0 < y(t) < 4$ allora $y'(t) = y(t) - \frac{1}{4}y^2(t) > 0$, e quindi la funzione y è crescente. Viceversa, se $y(t) > 4$ la funzione y è decrescente.

Riassumendo, abbiamo trovato che se il dato iniziale a soddisfa $0 < a < 4$ la soluzione $y(t)$ è crescente e sempre minore di 4 (e quindi avrà sicuramente un asintoto orizzontale per $t \to +\infty$!) mentre se $a > 4$ la soluzione è decrescente e sempre maggiore di 4 (e quindi anche questa avrà un asintoto). Questo tipo di analisi, in cui si cercano di ricavare più proprietà possibili delle soluzioni senza risolvere esplicitamente l'equazione, si chiama *analisi qualitativa*.

Per trovare la forma esplicita della soluzione, usiamo la Proposizione 4. In questo caso la funzione $f(y) = y - \frac{y^2}{4}$. Cerchiamo una funzione F tale che

$$F'(y) = \frac{1}{y - \frac{1}{4}y^2}.$$

Intanto vediamo che

$$\frac{1}{y - \frac{1}{4}y^2} = \frac{4}{4y - y^2} = \frac{4}{y(4-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{4-y}$$

Sappiamo che

$$\log(y)' = \frac{1}{y}$$

e usando la formula di derivazione per funzioni composte abbiamo che

$$\log(4-y)' = -\frac{1}{4-y}$$

quindi la nostra funzione $F(y)$ è

$$F(y) = \log(y) - \log(4-y) = \log\left(\frac{y}{4-y}\right).$$

Usiamo quindi la formula (2.3) e abbiamo che le soluzioni nonconstanti di (2.4) verificano

$$\log\left(\frac{y(t)}{4-y(t)}\right) = t + \log\left(\frac{a}{4-a}\right)$$

ovvero

$$\log\left(\frac{y(t)}{4-y(t)}\frac{4-a}{a}\right) = t$$

$$\frac{y(t)}{4-y(t)}\frac{4-a}{a} = e^t$$

$$y(t) = \frac{4}{\left(\frac{4}{a} - 1\right)e^{-t} + 1}$$

che ci dà il risultato voluto. Si vede quindi che *tutte* le soluzioni, indipendentemente dal dato iniziali si avvicinano alla soluzione di equilibrio!

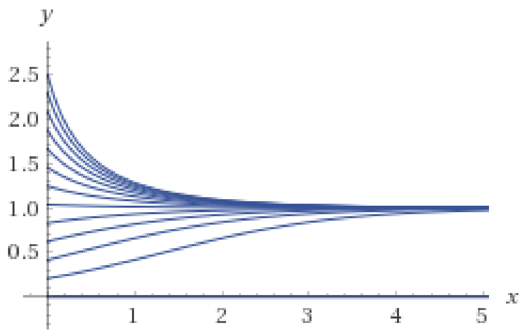


Figura 2.3. Le soluzioni dell'equazione (2.4)

Allora a Thanos, sarebbe bastata qualche lezione di analisi, o almeno usare i suoi immensi poteri per andare a sbirciare nel futuro, per rendersi conto che il suo semplice calcolo era completamente sbagliato, e che sterminare metà popolazione non avrebbe prodotto nessun risultato duraturo!

Ma non ci vogliamo fermare qui. Cosa sarebbe successo se, in un attacco di bontà, Thanos avesse deciso, come suggerisce il fumettista Leo Ortolani di raddoppiare le risorse invece di dimezzare la popolazione?

Nel nostro modello il parametro σ è quello che dice quanto gravemente l'effetto di sovrappopolazione si fa sentire. Più grande è σ, più il valore limite $\frac{\alpha-\omega}{\sigma}$ a cui la popolazione tende diventa piccolo, e viceversa. Raddoppiare le risorse significa ridurre l'effetto della sovrappopolazione, ovvero abbassare il valore σ (anche se non è chiaro di quanto il fattore cambi) e di conseguenza alzare il valore di soglia a cui tende la popolazione. Il comportamento delle soluzioni comunque non cambia: in ogni caso si arriverebbe ad un numero di individui tale per cui l'effetto della carestia bilancia il tasso di natalità, ovvero in una situazione in cui qualche individuo necessariamente muore di fame.

Ci resta ancora un quesito fondamentale: il modello è robusto rispetto alla scelta di $-\sigma y^2$ per modellizzare la carestia? Cosa sarebbe successo scegliendo una potenza diversa? Fissiamo come prima, per non complicare troppo i calcoli, gli stessi valori

$\sigma = 1/4$ e di $\alpha - \omega = 1$ e proviamo a vedere cosa succede con la potenza cubica. L'equazione diventa

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - \frac{1}{4}y^3(t) \\ y(0) = a \end{cases} .$$

Scomponiamo $y - \frac{1}{4}y^3 = y\left(1 - \frac{1}{4}y^2\right) = y\left(1 - \frac{1}{2}y\right)\left(1 + \frac{1}{2}y\right)$ che ha come radici $y = 0$, $y = 2$ e $y = -2$. Questo ci dice che le soluzioni costanti sono $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 2$ (la soluzione $y(t) \equiv -2$ non ci interessa perché le popolazioni non possono avere un numero negativo di individui). Possiamo ripetere l'analisi qualitativa e scopriamo che per $a > 2$ le soluzioni sono decrescenti e maggiori di 2, mentre per $a < 2$ le soluzioni sono crescenti, positive e minori di 2. Con sufficiente pazienza si potrebbe anche ripetere tutto il procedimento per trovare una soluzione esplicita, e dimostrare che ancora una volta tutte le soluzioni tendono al valore di soglia 2. Quindi, cambiando la potenza, l'unica differenza è il valore limite, che passa da 4 a 2. Questo è plausibile, visto che la potenza cubica cresce più della quadratica per valori grandi, e quindi l'effetto della scarsità di cibo diventa più drastico. Lo stesso ragionamento si può ripetere, con modifiche minime, scegliendo una qualsiasi potenza, senza che cambi in modo sostanziale il comportamento delle soluzioni. Questo rende l'equazione logistica un modello estremamente interessante e flessibile. Oltre a dimostrare che l'unica scelta arbitraria che abbiamo fatto in realtà era ininfluente ai fini del modello.

Facciamo un'ultima considerazione: vediamo cosa succede confrontando il nostro modello con dei dati reali. Il confronto sarà di tipo qualitativo, perché il nostro modello è troppo semplificato per un'analisi quantitativa: vogliamo insomma vedere se gli andamenti che abbiamo trovato assomigliano a quelli della popolazione mondiale. Questo ci dirà se il nostro modello è plausibile, e quindi al di là delle semplificazioni ci offre una chiave di lettura del mondo, oppure se è campato in aria. Prendiamo due dati che si possono recuperare facilmente in rete: l'andamento della popolazione continente per continente e la previsione di crescita globale.

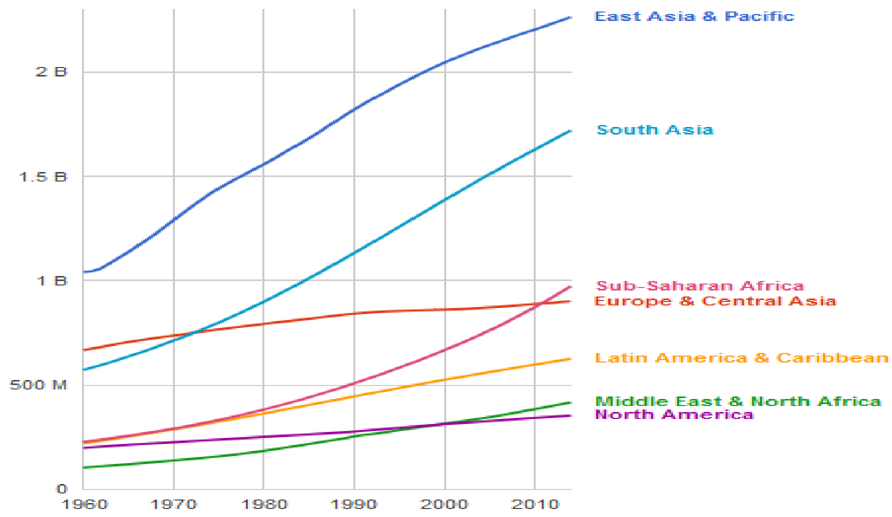


Figura 2.4. Andamento della popolazione per continente

Si vede, come avevamo già anticipato, che il nostro modello funziona solo su scala globale: ogni continente ha il suo tasso di crescita, e non tutti gli andamenti corrispondono alla nostra previsione. In qualche caso la crescita sta rallentando, in Europa, addirittura, la popolazione sta decrescendo. Evidentemente su scala continentale i fattori culturali, tecnologici, economici, migratori, che non abbiamo inserito nel nostro modello, giocano un ruolo al pari della scarsità delle risorse.

Su scala globale, invece, le cose vanno meglio.

Non solo i dati reali, fino al 2015, sono in linea con le nostre soluzioni, ma due previsioni su tre seguono l'andamento delle nostre soluzioni (in quella alta siamo già molto vicini alla soglia di equilibrio, in quella media siamo più lontani). Quindi, anche i modelli sicuramente più raffinati del nostro, che usano i demografi, sono vicini, almeno come andamento alla nostra equazione logistica. Se si pensa che questa equazione è stata introdotta circa nel 1840 da Pierre François Verhulst, la sua efficacia appare sorprendente. Ma non è finita qui. Anche cambiando modello, la logistica riapparirà più avanti. Questo succede spesso in matematica: la bontà di un modello si giudica anche dal tipo di equazione che lo descrive. Se l'equazione ha un buon compromesso tra ricchezza di struttura (ovvero varietà e numero di soluzioni, presenza di termini di tipo diverso, flessibilità) e semplicità di risoluzione, allora questa equazione probabilmente sarà usata descrivere altri fenomeni, e sottostarà a modelli nati in ambiti anche molto diversi fra loro. Insomma, la buona matematica non si butta mai via.

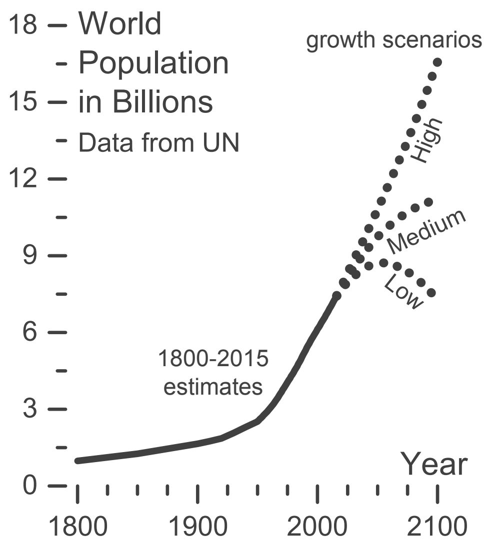


Figura 2.5. Previsioni di crescita della popolazione mondiale

3. I modelli Lotka-Volterra

Passiamo adesso ad un altro modello molto famoso, studiato a partire dagli anni '40 dello scorso secolo: il modello Predatore-Preda, o Lotka-Volterra, dal nome dei due matematici che hanno dato i primi contributi. Si immagina che in un sistema isolato (ad esempio un lago) ci siano due tipi di specie, una -la preda- che si ciba delle risorse naturali, ad esempio un pesce che mangia le alghe lacustri ed una seconda -il predatore- che si nutre della prima popolazione. Cerchiamo di giustificare il modello. La popolazione delle prede, in assenza di predatori, può riprodursi tranquillamente, quindi il suo tasso di crescita è proporzionale al numero di individui. Non prendiamo in considerazione la scarsità delle risorse a disposizione delle prede, perché nel nostro modello immaginiamo che il prelievo di individui mangiati dai predatori intervenga a bilanciare la crescita della popolazione delle prede prima della scarsità di risorse. Se volessimo studiare un modello in cui questo fattore entri in gioco, sarebbe sufficiente aggiungere un termine analogo a quello visto nell'equazione logistica. Consideriamo invece che la popolazione dei predatori, senza le prede, muoia di fame: in questo caso il tasso di mortalità sarà minore di quello di fertilità, e il tasso di variazione della popolazione sarà negativo. Quindi, indicati con $x(t)$ e $y(t)$ il numero di individui rispettivamente di prede e predatori al tempo t, senza considerare l'effetto della predazione avremmo

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ y'(t) = -by(t) \end{cases}.$$

Aggiungiamo ora la predazione. Si ha predazione ogni volta che un predatore incontra una preda. Quindi possiamo immaginare che il numero di predazioni sia proporzionale al prodotto delle due popolazioni (cresce al crescere delle due popolazioni ed è piccolo quando almeno una delle due popolazioni ha pochi individui). Ogni predazione diminuisce il numero di prede, e fa crescere il numero di predatori, quindi aggiungiamo un termine negativo proporzionale al prodotto $x(t)y(t)$ alla prima riga e un termine positivo proporzionale allo stesso prodotto nella seconda riga, ottenendo

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - cx(t)y(t), \\ y'(t) = -by(t) + dx(t)y(t); \\ x(0) \text{ e } y(0) \text{ assegnati.} \end{cases} \tag{3.1}$$

I fattori di proporzionalità c e d non sono necessariamente uguali perché non è detto che la relazione tra numero di predazioni e tasso di crescita dei predatori sia così banale, ad esempio se il predatore è grande e la preda piccola ci vogliono molte prede per sfamare un predatore, e viceversa a proporzioni invertite. Anche questo sistema ammette delle soluzioni costanti, che in questo caso vengono chiamate soluzioni, o configurazioni, di *equilibrio*. Per trovarle, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = ax - cxy \\ 0 = -by + dxy \end{cases}.$$

Questo sistema ha due coppie di soluzioni: una banale, ovvero $(x, y) = (0, 0)$, che corrisponde al caso in cui entrambe le popolazioni non esistono, e quella, più interessante, data da $(x, y) = (b/d, c/a)$. In questo caso la predazione e i tassi di crescita si equilibrano perfettamente nel tempo. Cosa succede se ci spostiamo da questa posizione di equilibrio?

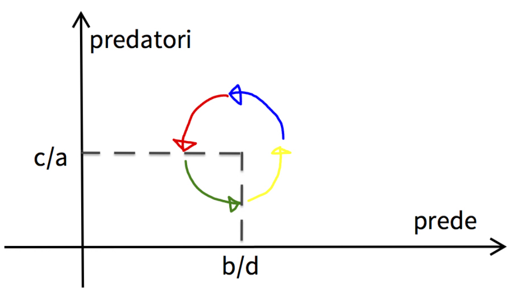


Figura 3.1. Andamento qualitativo della Lotka-Volterra

Se il numero delle prede è sotto la condizione di equilibrio, i predatori iniziano a morire di fame, e anche il loro numero scende sotto la soglia di equilibrio. Questo fa salire il numero delle prede (freccia verde). Appena le prede sorpassano lo stato di equilibrio b/d il numero di predatori inizia a crescere (freccia gialla), fino a che il numero di predatori non oltrepassa la soglia di equilibrio c/a. A quel punto la situazione si inverte: il numero di prede inizia a diminuire per la troppa predazione, mentre quello dei predatori continua a salire, fino a che le prede non scendono sotto il valore b/d (freccia blu). Da qui i predatori iniziano a diminuire, fino a raggiungere la soglia di equilibrio (freccia rossa), e il ciclo ripete lo stesso andamento. Quello che ancora non sappiamo è se questo ciclo si chiude su se stesso, o se ad ogni giro si avvicina o si allontana dal punto di equilibrio. In questo caso la risposta è semplice, e dipende dal seguente risultato.

Proposizione 5. *Sia* $(x(t), y(t))$ *una soluzione di (3.1) diversa da* $(0,0)$. *Allora la funzione*

$$H(x(t), y(t)) = dx(t) - b\log(x(t)) + cy(t) - a\log(y(t))$$

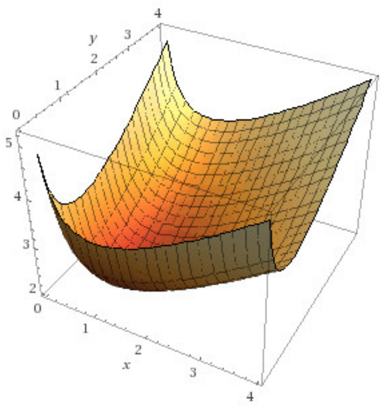
è costante rispetto a t.

Dimostrazione. Prendiamo la funzione $H(x(t), y(t))$ e deriviamola rispetto a t. Poi usiamo l'equazione (3.1) per valutare $x'(t)$ e $y'(t)$. Abbiamo

$$\begin{aligned}(H(x(t), y(t)))' &= dx'(t) - b\frac{x'(t)}{x(t)} + cy'(t) - a\frac{y'(t)}{y(t)} \\ &= x'(t)\left(d - \frac{b}{x(t)}\right) + y'(t)\left(c - \frac{a}{y(t)}\right) \\ &= (ax(t) - cx(t)y(t))\left(d - \frac{b}{x(t)}\right) + (dx(t)y(t) - by(t))\left(c - \frac{a}{y(t)}\right) \\ &= (a - cy(t))(dx(t) - b) + (dx(t) - b)(cy(t) - a) = 0,\end{aligned}$$

e visto che la derivata è nulla, la funzione $H(x(t), y(t))$ è costante sulle soluzioni. □

Come usiamo questo dato? Immaginiamo, per fissare le idee, di partire con un dato iniziale $(x(0), y(0))$ tale che $H(x(0), y(0)) = 1$. Allora sappiamo che lungo tutta la traiettoria $(x(t), y(t))$, la funzione $H(x(t), y(t)) \equiv 1$. Basta disegnare allora il grafico della funzione H e trovare, i punti per cui $H = 1$, e questo ci darà la nostra traiettoria (anche se non il verso di percorrenza, che però abbiamo trovato prima). Questo è vero in generale, ogni volta che tracciamo *una curva di livello*, ovvero una curva per cui i valori di H sono costanti, abbiamo trovato una traiettoria, come si vede in figura.



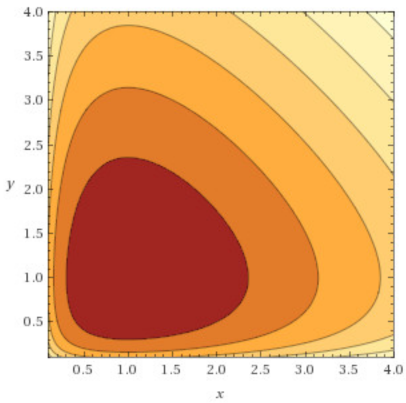


FIGURA 3.2. Il grafico della funzione H e le sue curve di livello

Come si usa questo modello con il problema dei pesticidi nei campi di granturco? Il granturco, come tutte piante, nutre dei piccoli insetti, che cerchiamo di eliminare dando dei pesticidi. Questi piccoli insetti, a loro volta, vengono mangiati da insetti carnivori. Quindi il campo di granturco è il nostro ambiente, in cui abbiamo una specie preda x, ed una predatore y. Immaginiamo di avere un pesticida molto selettivo, che uccida solo l'insetto che mangia il granturco e non il suo predatore. Chiaramente questo è un caso molto semplificato, ma già basta a spiegare un fenomeno strano che è stato osservato in natura. Se si agisce dando il pesticida quando la popolazione $x(t)$ è al suo minimo, ci spostiamo da una traiettoria più vicina al punto di equilibrio su una più lontana. Questo vuol dire che quando la popolazione $x(t)$, seguendo questa traiettoria, arriva al massimo, il valore sarà molto superiore di quello osservato al ciclo precedente! Il momento giusto di dare il pesticida è quando la popolazione dannosa è al suo apice, per passare su una traiettoria vicina quanto più possibile a quella di equilibrio, in questo modo il minimo numero di insetti sarà più alto, ma il picco sarà sotto controllo (e in questo si perde qualcosa, ma non l'intero raccolto).

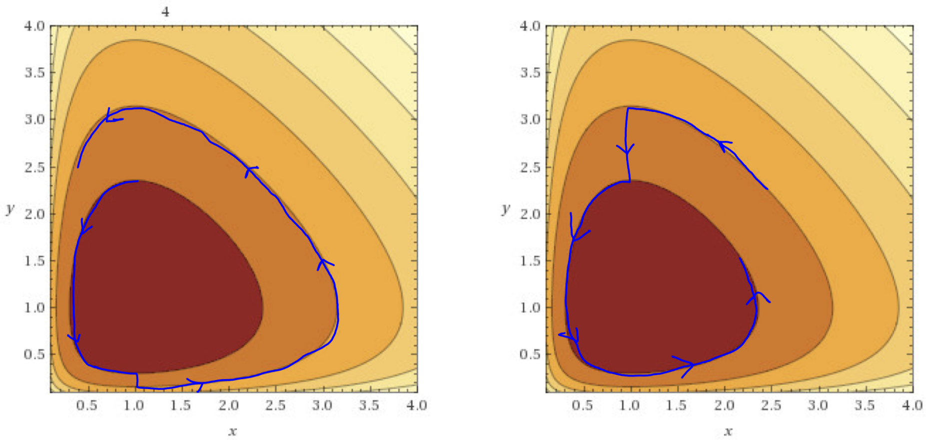


FIGURA 3.3. Il pesticida agisce solo su $x(t)$

Se pensiamo, invece, che il pesticida sia nocivo per entrambe le specie, che è un'ipotesi più verosimile, il tipo di ragionamento è simile, ma questa volta ci muoviamo in diagonale tra le orbite, quindi bisogna fare più attenzione al momento giusto, come si vede nella figura successiva.

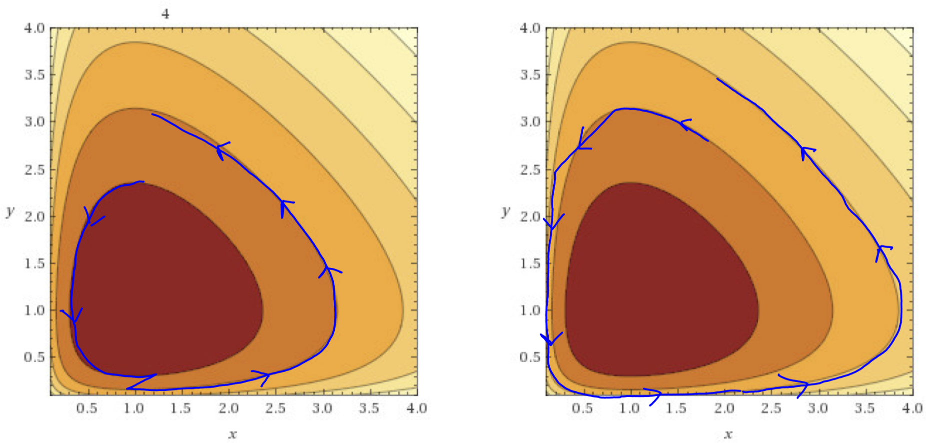


FIGURA 3.4. Il pesticida agisce su entrambe le popolazioni

4. I modelli di infezione

Siamo all'ultimo dei casi che tratteremo in questo breve viaggio nelle equazioni differenziali: i modelli di infezione (si, anche gli zombies!). Partiamo da un caso di malattia un po' meno aggressiva: il raffreddore.

Il raffreddore è una malattia che non è mortale, né immunizzante, ovvero si guarisce, ma una volta guariti ci si può riammalare. Inoltre ha un decorso piuttosto rapido, quindi possiamo immaginare di considerare una popolazione che ha un numero di individui costante nel tempo, dato che l'evoluzione del raffreddore è breve rispetto alle variazioni demografiche. Dividiamo la nostra popolazione in due classi: i suscettibili S, ovvero quelli che ad un certo istante t sono sani, e quindi si possono ammalare, e gli infetti I, quelli che all'istante t hanno il raffreddore. Abbiamo detto che il numero di individui è costante nel tempo, diciamo pari ad un certo valore N, quindi

$$S(t) + I(t) = N.$$

Data una malattia con un certo tasso di infettività r, consideriamo che il contagio dipende dagli incontri tra infetti e sani, quindi avremo un termine del tipo $rS(t)I(t)$ che farà passare da sani ad infetti. Inoltre ci sarà un tasso di guarigione a, e il numero di guariti sarà proporzionale al numero di infetti. Il diagramma del decorso della malattia

$$S \xrightarrow{\text{infezione}} I \xrightarrow{\text{guarigione}} S$$

è quello che dà il nome al modello: SIS.

L'equazione che regola il numero di infetti e suscettibili al variare del tempo sarà dunque:

$$\begin{cases} S'(t) = -rS(t)I(t) + aI(t) \\ I'(t) = +rS(t)I(t) - aI(t) \\ I(t) + S(t) = N. \end{cases} \tag{4.1}$$

La terza equazione ci dice che possiamo ricavare la popolazione dei suscettibili come $S(t) = N - I(t)$ e sostituirla nella seconda equazione, ottenendo

$$I'(t) = +r\,(N - I(t))\,I(t) - aI(t) = (rN - a)\,I(t) - rI^2(t),$$

che è di nuovo un'equazione di tipo logistico! Qui vediamo un esempio di quanto abbiamo detto prima: quando un modello è sufficientemente flessibile, trova diversi ambiti di applicazione. L'unica differenza con quanto visto è che adesso non sappiamo se il termine $(rN - a)$ è positivo o negativo. Se questo termine è positivo, quando $N > a/r$, cioè se la popolazione iniziale è abbastanza grande rispetto al rapporto a/r, che dipende solo dal tipo di malattia, allora siamo esattamente nel caso della logistica vista precedentemente: ci sarà un valore positivo di equilibro a cui la popolazione tende. Avere un valore del genere vuol dire che nel tempo ci sarà un tasso di infetti pressoché costante: la malattia è di tipo *endemico*. Se invece $N < a/r$ si può risolvere esplicitamente l'equazione e vedere che $I(t) \to 0$. Se si vuole far meno fatica, si può considerare che $I'(t) = (rN - a)\,I(t) - rI^2(t) < (rN - a)\,I(t)$, e concludere che in tal caso la popolazione decresce più rapidamente della soluzione dell'equazione $I'(t) = (rN - a)\,I(t)$, che va a zero esponenzialmente, come visto in precedenza. La malattia quindi non si innesca se non ci sono sufficienti individui, e il numero degli infetti va a sparire nel tempo.

Abbiamo quindi, al variare del dato iniziale N i tre andamenti in figura: Se $N > a/r$ e gli infetti sono sopra il valore di soglia, se $N < a/r$ e gli infetti sono sotto il valore di soglia, e se $N < a/r$ (Nella figura il valore di soglia a/r viene indicato con T).

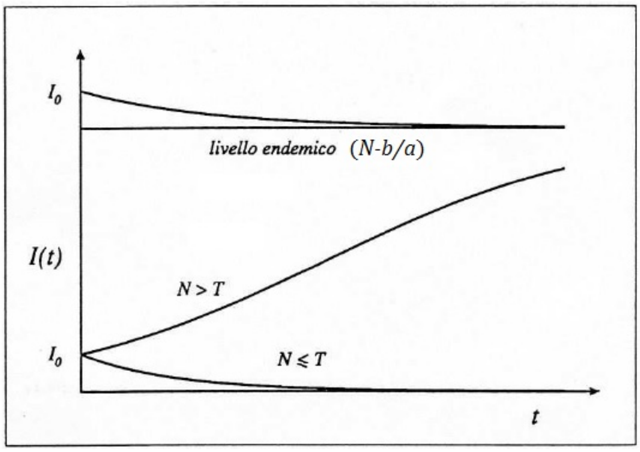


FIGURA 4.1. L'andamento delle soluzioni del modello SIS

Consideriamo adesso un altro tipo di infezione, per cui chi è infetto si immunizzi una volta guarito, oppure muoia, ma in ogni caso non possa ammalarsi nuovamente: il morbillo, per esempio. Ancora una volta consideriamo il numero totale della popolazione costante, ma questa volta dividiamo il totale in tre gruppi: suscettibili ed infetti, come prima, più i rimossi, quelli cioè che, a causa del decesso o -si spera- della guarigione, non possono più infettarsi. Ancora una volta ci sarà un contagio che dipende dal tasso di infezione r e dagli incontri tra suscettibili e infetti, e un tasso di rimozione a, proporzionale al numero degli infetti, che trasforma gli infetti in rimossi (e non in suscettibili come nel caso precedente). La situazione quindi sarà

$$S \xrightarrow{\text{infezione}} I \xrightarrow{\text{rimozione}} R$$

ed infatti questo si chiama modello SIR. Visto che abbiamo una fascia in più di popolazione il modello si complica, e sarà difficile risolverlo esplicitamente come abbiamo fatto nei casi precedenti. Ci accontentiamo, da qui in poi, di fare un po' di analisi qualitativa e di riportare i risultati che si trovano nella letteratura scientifica. L'equazione, visto le considerazioni di sopra, avrà la forma:

$$\begin{cases} S'(t) = -rS(t)I(t) \\ I'(t) = +rS(t)I(t) - aI(t) \\ R'(t) = aI(t) \\ I(t) + S(t) + R(t) = N. \end{cases} \tag{4.2}$$

Intanto vediamo che $S'(t) < 0$, quindi il numero dei suscettibili diminuisce nel tempo. Questo ci fornisce un'indicazione per studiare il numero degli infetti. Abbiamo infatti

$$I'(t) = +rS(t)I(t) - aI(t) = (rS(t) - a)I(t). \tag{4.3}$$

Anche qui c'è un valore di soglia: se $S(0) < a/r$, allora la derivata di $I(t)$ è sempre negativa, perché $S(t) < S(0)$ per quanto detto prima. Quindi il numero di infetti decresce nel tempo, e non c'è un picco epidemico. Al contrario, se $S(0) > a/r$ almeno all'inizio I' è positivo, quindi abbiamo un aumento del numero di infetti. A questo livello ancora non è chiaro se, visto che S decresce, ad un certo punto $S(t)$ torni sotto il livello di soglia ed il numero degli infetti inizi a calare. Per far questo dobbiamo fare un analisi più approfondita, ma non abbiamo abbastanza strumenti. La risposta la troviamo nella letteratura sull'argomento, ed abbiamo in effetti che malattie di questo tipo hanno un aumento repentino del numero degli infetti, e poi un'inversione di tendenza. Questo è il fenomeno che vediamo ad ogni inverno, con il *picco epidemico* dell'influenza. In figura vediamo i due andamenti possibili (anche in questo caso il valore di soglia è indicato da T).

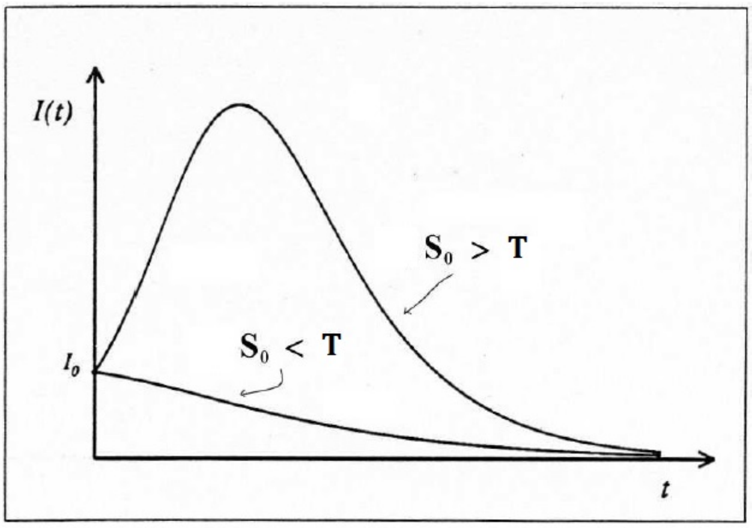


FIGURA 4.2. L'andamento delle soluzioni del modello SIR

Facciamo ancora due considerazioni, prima di passare oltre: intanto numero di suscettibili è una fattore su cui possiamo avere il controllo, in situazione ottimale, perché non rappresenta le persone sane, ma quelle suscettibili di infezione: vaccinare abbassa il valore di $S(0)$! In effetti, data una malattia, questo modello è sufficientemente raffinato da riuscire a calcolare la percentuale di popolazione vaccinata necessaria a far scendere $S(0)$ sotto il livello di soglia, e innescare il cosiddetto *effetto gregge*.

Facciamo, infine, un confronto, sempre di tipo qualitativo, con un caso reale: la diffusione iniziale del Coronavirus 2019-nCoV. Si è sentito dire che, essendo un virus di tipo nuovo, ci si aspetta, se non si mettono in atto strategie di contenimento, una diffusione *di tipo esponenziale*. I nostri modelli lo prevedono? E quali sono i dati reali?

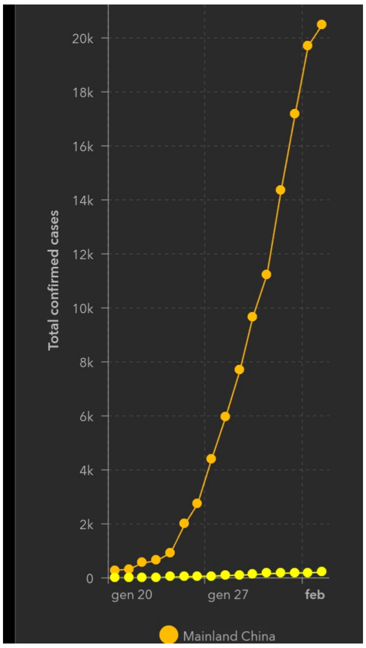


FIGURA 4.3. Prima diffusione del Coronavirus

Virus di questo tipo danno luogo ad un'infezione di tipo SIR: l'equazione degli infetti è data dalla (4.3), ma risolverla esplicitamente va al di là delle nostre competenze. Possiamo fare però alcune semplificazioni: intanto, se vogliamo studiare la diffusione nei primissimi giorni di diffusione del virus, possiamo supporre che nessuno guarisca nel nostro intervallo di tempo, quindi possiamo prendere $a = 0$, e fare una prima semplificazione dell'equazione. In un paese densamente popolato come la Cina, inoltre, il numero di infetti sarà trascurabile rispetto al numero dei suscettibili (che corrisponde all'intera popolazione, essendo il Coronavirus un agente nuovo agente patogeno). Nei primissimi giorni dell'infezione quindi, possiamo anche supporre che $S(t) \equiv S(0)$, ovvero che il numero dei suscettibili rimanga costante. Quindi l'equazione (4.3) all'inizio del contagio si semplifica in

$$I'(t) = +rS(0)I(t)$$

che ha proprio un andamento esponenziale di tipo $I(t) = e^{rS(0)t}$. E se guardiamo il grafico con i dati raccolti dalla Johns Hopkins University nella prima settimana di infezione, vediamo proprio un andamento di questo tipo! Poi vengono prese delle misure di contenimento, e infatti si vede che nel grafico la crescita rallenta.

E adesso arriviamo finalmente, al piatto forte di questa chiacchierata: gli zombies!

FIGURA 4.4. "Quando i morti camminano -signori- dobbiamo smettere di uccidere. Altrimenti si perde la guerra". Dawn of the dead, G. Romero

Il matematico australiano Robert Smith?[1] ha immaginato un modello di tipo infettivo in cui la malattia propagata sia il virus degli zombies. Intanto bisogna stabilire cosa si intende per zombie, visto che la sorgente non è il mondo reale, ma quello narrativo: bisogna scegliere tra le varie versioni presenti nei libri, nei film, nei fumetti, eccetera. Robert Smith? ha deciso di partire dal capostipite degli zombies al cinema: George Romero. I suoi zombies nascono per effetto di un virus che rianima i morti (almeno quelli con sufficiente carne attaccata da potersi muovere), anche gli umani si possono infettare tramite il morso di uno zombie, e l'unico modo di "guarire", una volta diventati zombies, è prendere una pallottola in testa ed uscire definitivamente di scena. Come si può descrivere un modello del genere? Intanto dividiamo la popolazione tra suscettibili $S(t)$, zombies $Z(t)$ e rimossi $R(t)$, analogamente al modello SIR. Questa volta, però, visto che il virus rianima i cadaveri, i rimossi devono tener conto di tutte le persone che all'istante iniziale sono morte e sepolte (almeno quelle abbastanza fresche da essere rianimati), dunque non è detto che $R(0) = 0$. Partiamo dall'equazione per i suscettibili, ovvero

[1]Sì , è scritto correttamente, il suo cognome finisce con un punto interrogativo.

gli esseri umani. Il tasso di variazione dipende in primis da tasso di nascita e tasso di morte (che va ad accrescere le file dei rimossi). Inoltre da suscettibili si diventa zombie incontrando uno morto vivente e venendo morsi, quindi ci sarà un termine negativo proporzionale agli incontri uomo-zombie $S(t)Z(t)$. Quindi, se n è il tasso di natalità, d quello di mortalità e r quello di infettività del virus, avremo

$$S'(t) = nS(t) - dS(t) - rS(t)Z(t).$$

Per gli zombie avremo il termine $rS(t)Z(t)$, positivo, che è quello per cui un suscettibile viene infettato. Poi un termine che va a pescare dai rimossi, proporzionale alla probabilità z di di riportare in vita un cadavere e dal numero di rimossi $R(t)$. Dalla condizione di zombie si esce solo se si incontra un umano che ci spara alla testa. Quindi ci sarà un termine negativo, proporzionale ancora a $S(t)Z(t)$ e alla probabilità a di riuscire a centrare un morto vivente in testa. Quindi

$$Z'(t) = rS(t)Z(t) + zR(t) - aS(t)Z(t).$$

Nei rimossi andiamo a mettere i resti delle condizioni precedenti, quindi

$$R'(t) = dS(t) - zR(t) + aS(t)Z(t).$$

Se guardiamo con attenzione, in realtà, qui abbiamo fatto un piccolo errore di modellizzazione: mettiamo nei rimossi anche gli zombies definitivamente uccisi con un colpo alla testa, che quindi potrebbero rientrare di nuovo in gioco tramite rianimazione. Perché? Questa è una semplificazione importante dal punto di vista della matematica, altrimenti avremmo dovuto considerare una quarta popolazione di rimossi definitivamente, e questo avrebbe complicato le cose. L'errore che facciamo, comunque, è trascurabile, perché, come Romero ci insegna, il numero di zombies che si riescono ad abbattere è piccolo rispetto al numero di morti che sono già disponibili all'istante $t = 0$ e agli umani che muoiono di morte naturale (o violenta) senza essere infettati da un morso. Inoltre se volessimo considerare, come nel caso dei film, un'infezione molto rapida per cui nel giro di poche ore siamo già in uno stato apocalittico, mettendo a zero i coefficienti di natalità e mortalità, avere la relazione $S' + Z' + R' = 0$ permetterebbe di usare le tecniche che di solito si usano per i modelli SIR. Vediamo qui un aspetto importante della modellizzazione: alle volte occorre fare modelli leggermente meno aderenti alla realtà (in questo caso si intende la realtà dei film di Romero) ma più facilmente trattabili dal punto di vista matematico. Poi, come abbiamo fatto con l'equazione logistica, dovremmo controllare se l'ipotesi che abbiamo fatto altera il modello oppure no. In questo caso abbiamo giustificato l'ipotesi paragonando il numero di rimossi $R(t)$ rispetto al numero $aS(t)Z(t)$.

Riassumendo, nel caso di infezione improvvisa (ponendo quindi $n = d = 0$) il nostro modello SZR diventa

$$\begin{cases} S'(t) = -rS(t)Z(t) \\ Z'(t) = rS(t)Z(t) + zR(t) - aS(t)Z(t) \\ R'(t) = -zR(t) + aS(t)Z(t) \\ S(t) + Z(t) + R(t) = N. \end{cases} \tag{4.4}$$

dove N è il numero totale di individui, tra umani, zombies e morti, all'istante iniziale. Anche in questo caso si trovano facilmente due soluzioni costanti, che sono $(S, Z, R) \equiv (N, 0, 0)$ e $(S, Z, R) \equiv (0, N, 0)$. Purtroppo la prima soluzione è di equilibrio *instabile*, ovvero anche partendo con un dato iniziale molto vicino a quello stato ci si allontana immediatamente da quella condizione, mentre la soluzione $(S, Z, R) = (0, N, 0)$ è un *attrattore*, ovvero tutte le soluzioni tendono verso questo stato. In questo modello, quindi, se si sviluppa l'infezione l'umanità è spacciata.

Robert Smith? ha proposto varie modifiche al modello, cercando di salvare il mondo che conosciamo. Ad esempio si può tener conto che non si diventa subito zombies, ma c'è uno stato intermedio di infezione latente $I(t)$ da cui poi si passa in $Z(t)$ con una certa probabilità $mI(t)$. Possiamo a questo aggiungere una quarantena, e magari anche un fattore per cui si passa direttamente dalla quarantena allo stato dei rimossi senza passare dallo stato Z (la famosa scena drammatica di tutti i film, in cui uno degli eroi scopre di essere stato morso e convince i compagni a spararGli in testa, con tanto di musica straziante a sottolineare il momento).

Risultati? I soliti: la soluzione $(S, Z, R) = (0, N, 0)$ resta sempre lo stato verso cui il sistema tende inesorabilmente.

E se ci fosse una cura? Si può inserire anche quel fattore, per cui dallo stato $I(t)$, o anche dallo stato $Z(t)$, si ritorna in uno stato $S(t)$, cioè si torna umani. Questo è il primo modello in cui compaia un altra soluzione limite in cui sopravvivano degli umani fino alla fine. Restano comunque molti zombies nella soluzione limite, e questo ancora non è ottimale. Non vogliamo dover prendere il fucile per andare a far la spesa, o vivere in zone recintate con i morti viventi che premono ai cancelli. L'unico modello -tra quelli presi in considerazione da Robert Smith?- in cui alla fine sopravvivono non ci sono più zombies è quello in cui ci siano attacchi da parte degli umani di tipo impulsivo, ovvero molto veloci e molto violenti, in cui si riesca ad uccidere un numero sufficiente di morti viventi. Questo modello è molto più complesso di quelli visti finora, si riesce a risolvere solo numericamente, e non lo vedremo qui. Ma basta per concludere che anche il prete di "Dawn of the Dead", in italiano "Zombi", ha preso una cantonata!

Ma perché, al di là dell'aspetto divertente dell'articolo di Smith?, è stato interessante studiare questo modello, se un infezione zombie al momento non sembra molto probabile? Come abbiamo detto nelle pagine iniziali, se la matematica che sta dietro il modello è buona, e abbastanza flessibile, fornisce comunque uno *strumento* utile per la comprensione dei fenomeni. I morti per ora continuano a riposare nei cimiteri, ma questo è il primo modello di infezione in cui il virus si propaga in modo diverso su due segmenti della popolazione, S e R. Potremmo immaginare una malattia che colpisce in maniera diversa due strati della popolazione, o che magari in qualcuno si manifesti (e da S si passi in Z) e in qualcuno resti silente (e da S si passi in R, per poi eventualmente essere recuperati come Z). Se comparisse una malattia del genere, che sembra più plausibile del virus immaginato da Romero, abbiamo già un modello base, studiato in molte varianti, per trattare il fenomeno.

5. Conclusioni

In questi esempi abbiamo visto come si costruiscono alcuni modelli di dinamica delle popolazioni. Va notato che, al di là della "realtà" del modello, ovvero sia che i modelli si riferiscano ad un problema reale, che di fantasia, molti degli ingredienti in gioco sono gli stessi, e si usano come mattoncini per costruire un nuovo modello partendo dalle considerazioni fatte nei casi precedenti: una volta capito quale formula matematica stia dietro i tassi di natalità e mortalità, l'abbiamo utilizzata ogni volta in cui la variazione demografica giocava un ruolo. Oppure abbiamo visto come ogni termine che dipenda dagli incontri tra due popolazioni diverse -che sia predazione o infezione poco importa- venga comunque descritto come un fattore proporzionale al prodotto delle popolazioni. O ancora, se volessimo descrivere uno scenario di apocalisse zombie in cui i sopravvissuti hanno problemi a recuperare le risorse necessarie al sostentamento, perché la civiltà è collassata, potremmo aggiungere alla prima equazione di (4.4) un termine del tipo $-cS^2(t)$ e modellizzare una situazione alla Walking Dead. Infine, abbiamo visto lo stesso modello comparire in scenari diversi: l'equazione logistica ritorna nel modello SIS; il modello di Lotka-Volterra, creato per studiare l'andamento delle popolazioni di pesce del mediterraneo dopo la seconda guerra mondiale spiega un fenomeno osservato nei campi coltivati.

In questo senso dicevamo all'inizio che il valore del modello dipende da quanto è buona la matematica che ci sta dietro, perché in questo caso è più facile che trovi un utilizzo in scenari anche molto lontani dal problema di partenza. In questo senso i nostri tre problemi hanno la stessa validità dal punto di vista matematico, al di là dell'aderenza al reale. In tutti e tre i casi studiati abbiamo fatto ipotesi *plausibili*, ovvero abbiamo imparato come si modellizzano alcuni aspetti del reale, abbiamo costruito modelli *robusti*, cioè che permettono molte variazioni sul tema analizzabili con gli stessi metodi, e con dietro una matematica sufficientemente semplice da poter essere studiata in modo approfondito, e quindi una matematica *interessante*. Quando un modello ha queste caratteristiche, allora riesce a dare delle indicazioni su come si possano interpretare i fenomeni naturali. Attenzione, però: con questo livello di semplificazione si riescono a trovare tante cose interessanti dal punto di vista qualitativo, cioè si possono capire quali fattori entrino in gioco nel mondo che ci circonda, e con che ruolo, ma a livello di principi generali. Questo è un aspetto molto importante, ma non è l'unico. Se avessimo bisogno di studiare un singolo problema con risultati quantitativi, riuscendo magari a fare delle previsioni precise, la strada che abbiamo visto in questi esempi non è la strada migliore: il prezzo che si paga per fare della buona matematica teorica è quello di fare molte semplificazioni. Dovremmo allora affidarci ad un'altra branca della matematica, quella applicata, che utilizza in modo rigoroso computer e simulazioni numeriche quando i parametri in gioco diventano troppi per poter trovare una soluzione esplicita.

Riferimenti bibliografici

[1] Walt Disney, *Paperino nel mondo della matemagica*: http://www.youtube.com/watch?v=2oyUCQhD2BM
[2] Marco Ghimenti, *Perché Thanos non sa la matematica*: http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/comicsscience/perche-thanos-non-sa-la-matematica/
[3] Leo Ortolani, *Infinity guanty persy a scuoly*: http://leortola.wordpress.com/2018/05/04/cinemah-presentainfinity-guanty-persy-a-scuoly/
[4] Wikipedia: pagina sulla popolazione mondiale: https://en.wikipedia.org/wiki/World_population
[5] Wikipedia: pagina sulle equazioni di Lotka Volterra: http://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Lotka-Volterra
[6] Gianni Gipi, *Zombi freschi*: http://vimeo.com/294745716
[7] Addolorata Marasco, Modelli epidemiologici di tipo SIS e SIR: http://www.federica.unina.it/smfn/metodi-e-modelli-matematici/modelli-epidemiologici-sis-sir/
[8] Dati sulla diffusione del Coronavirus 2019-nCoV raccolti dalla Johns Hopkins University: http://systems.jhu.edu/research/public-health/ncov/
[9] Davide Mana, *Faina Solitaria*, un racconto in cui si citano i modelli di infezione zombie di Robert Smith?: http://fainasolitaria.blogspot.com/2010/12/il-tempo-e-dalla-nostra-parte.html
[10] Robert Smith?, pubblicazioni sugli zombies: http://mysite.science.uottawa.ca/rsmith43/zombies.htm

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Email address: marco.ghimenti@unipi.it