Settimana Matematica 2020

Cristian Sopio

Febbraio 2020, Pisa
Dipartimento di Matematica

Sommario

Per affrontare e modellizzare correttamente i problemi di dinamiche di popolazioni, ci serviranno alcuni strumenti preliminari: in particolare, introdurremo la *derivata* di una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, e ci interesseremo alle equazioni in cui questo oggetto è presente, dette *equazioni differenziali*.

1 Prerequisiti

1.1 Definizione di derivata

Consideriamo una funzione

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $D \subset \mathbb{R}$ e cerchiamo, fissato un punto $x_0 \in D$, la retta che meglio approssima f nel punto: guardando il grafico di f, è abbastanza intuitivo che tale retta sia la tangente al grafico in $A = (x_0, f(x_0))$.
Vogliamo quindi trovare il coefficiente angolare di tale retta: per farlo, consideriamo, come in *Figura 1*, un altro punto $x_0 + h$ (per qualche $h \in \mathbb{R}$) sulla retta reale, e guardiamo la retta secante il grafico che passa per A e $B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Il coefficente angolare di tale retta, che diciamo *rapporto incrementale*, vale

$$m_{x_0,x_0+h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Per trovare il coefficiente angolare della tangente al grafico di f in A, possiamo pensare di muovere il punto B sul grafico di f in modo da avvicinarlo ad A, guardando la tangente in A come la secante il grafico *quando* $B = A$; in termini dell'ascissa di B, tale operazione corrisponde a portare h a zero, perché $x_0 + h$ coincida con x_0.
Diciamo allora che il coefficiente angolare della tangente al grafico di f in $A = (x_0, f(x_0))$, che chiamiamo *derivata* di f in x_0, è il *limite* di m_{x_0,x_0+h} per h che tende a zero, e scriviamo

$$f^{'}(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

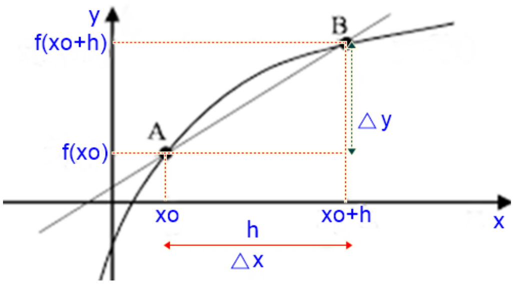

Figura 1: Rapporto incrementale

Notiamo che, a priori, non è detto che il procedimento di limite ora descritto sia possibile in ogni punto di f: cioè, la derivata di f in x_0 *potrebbe non esistere*. Nel caso in cui invece esista, diciamo che f è *derivabile* in x_0; se poi la derivata di f esiste *in ogni punto* di D, diciamo semplicemente che f è derivabile su D.
Vediamo alcuni esempi di calcolo delle derivate.

$\diamondsuit$ **1** Consideriamo $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ costante. Abbiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato che una funzione costante assume lo stesso valore in ogni punto.

$\diamondsuit$ **2** Prendiamo $f(x) = x^2$. Vale

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x_0 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2x_0 + h \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

.

1.2 Proprietà della derivata

Data una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo *immagine* di f l'insieme $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ dei valori che f assume. Prese due funzioni $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ con $E \subset \operatorname{Im} f$, indichiamo con $g \circ f$ la loro *composizione*, cioè la funzione $D \longrightarrow \mathbb{R}$ ottenuta applicando prima f e poi g, in modo che $g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$.

Date invece $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo la loro *somma* come $f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, descritta da $f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$; indichiamo infine con $\alpha f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $x \longmapsto \alpha f(x)$.

Proposizione 1.1. *Siano $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, funzioni continue e derivabili, allora valgono le seguenti proprietà:*

i. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*

ii. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*

Presa invece $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $E \subset \mathrm{Im} f$ *si ha*

iii. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Le prime due proprietà descrivono la linearità *della derivata, la* (iii) *è detta* Chain Rule.

Dimostrazione. Diamo una dimostrazione solo del primo enunciato, il secondo si ottiene in maniera analoga al primo.

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

□

Osservazione 1.2. Applicando più volte le proprietà sopra, possiamo calcolare derivate di funzioni composte da più funzioni di cui sappiamo già calcolare la derivata. Ad esempio, data una funzione polinomiale

$$p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ al variare di $i = 0, ..., n$, si ottiene

$$p'(x) = \alpha_n (x^n)' + \alpha_{n-1}(x^{n-1})' + \cdots + \alpha_1 (x)' + \alpha_0'.$$

1.3 Esercizi

Provate adesso con gli strumenti che avete a risolvere i seguenti esercizi

1. Calcolate la derivata delle funzioni $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^n$ con n intero positivo.
2. Calcolate la derivata delle funzioni $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$.
3. Dimostrate il punto $(ii.)$ della **Proposizione 1.1**.

*4. Calcolate la derivata delle funzioni $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$

*5. Calcolate la derivata delle funzioni $f(x) = e^{\alpha x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x^2$ [*Hint*: usare la formula di derivazione per la funzione composta capendo bene chi sono f e g.]

6. Disegnate le rette $y = 2x + 1$, $y = -x + 2$, $y = 2$ e provare a disegnare funzioni crescenti e/o decrescenti che hanno per retta tangente le rette date. Si può sempre fare?

*7. Trovate una funzione per cui in un dato punto $x_0 \in D$ la derivata non esiste.

Prima di passare all'argomento successivo affrontiamo la seguente

Proposizione 1.3. *Date $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue e derivabili su D tali che*

i. $f'(x) = g'(x)$ *per ogni* $x \in D$*;*

ii. *esiste* $x_0 \in D$ *tale che* $f(x_0) = g(x_0)$*,*

allora $f(x) = g(x)\ \forall x \in D$*.*

Dimostrazione. Per affrontare la dimostrazione, abbiamo bisogno di usare il fatto che se $f' \equiv 0$ allora f è costante (ciò è dimostrabile in due modi diversi, via il *teorema di Lagrange* o tramite la *teoria dell'integrazione*). Usando questo risultato, consideriamo la funzione $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) := f(x) - g(x).$$

Derivandola, si ha che

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

per ogni x, quindi la funzione h è costante. Inoltre sappiamo che $h(x_0) = 0$, e otteniamo che $f(x) - g(x) = 0$ per ogni $x \in D$, cioè $f = g$. □

2 Primo studio di equazioni differenziali (ODE)

2.1 Che cos'è un'equazione differenziale

Partiamo da un esempio della vita reale: supponiamo di avere a disposizione i dati del tachimetro di un camion, e doverne ricostruire il viaggio. In tal caso, conoscendo i dati relativi alla sua velocità e ai suoi tempi di percorrenza, vorremmo ricostruire la posizione del camion a ogni istante di tempo t.

La velocità (istantanea), a un dato istante t_0, di un corpo fisico la cui posizione è una certa funzione reale del tempo, diciamo $y(t)$, è la variazione della sua posizione $y(t_0)$ in un istante di tempo infinitamente piccolo; più precisamente, è descritta da

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}$$

ed è pertanto proprio la derivata di $y(t)$ in t_0, cioè $v(t_0) = y'(t_0)$. Pertanto, nel caso in esame, se la velocità del camion è descritta da una funzione $f(t, y(t))$, dipendente dal tempo e dalla posizione del camion, l'equazione che descrive il problema è della forma

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Diciamo *equazione differenziale* un'equazione di questa forma. Per risolvere un'equazione differenziale, cioè trovare la funzione $y(t)$ (nel nostro caso, la posizione del camion), dobbiamo invertire il processo appena imparato: non si tratta più di derivare funzioni per conoscere le loro derivate, ma di trovare le funzioni di cui quelle date *sono* le derivate. La risposta al problema inverso della derivazione è data da una teoria ampia e profonda, detta *teoria dell'integrazione*.

2.2 Esempi di equazioni differenziali e problemi di Cauchy

♢ **1** Cerchiamo una funzione $y(t)$ per cui valga

$$y'(t) = t^2.$$

Questo è piuttosto semplice: una soluzione si vede ad occhio, ed è data da $y(t) = t^3/3$. Da qui, si deduce che tutte le funzioni che soddisfano questa relazione sono del tipo

$$y(t) = \frac{t^3}{3} + c$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Quest'esempio mostra come, in generale, la soluzione di un'equazione differenziale non sia unica: nel caso appena osservato, abbiamo un'infinità di funzioni che verificano l'equazione. Possiamo allora aggiungere *condizioni iniziali* sulla soluzione, cioè imporre che in un punto t_0 fissato la y che cerchiamo assuma un certo valore y_0. Quello che otteniamo è un *problema di Cauchy*, della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Qui abbiamo per il *Teorema 3* delle dispense del laboratorio l'esistenza e l'unicità della soluzione[1].

♢ **2** Risolviamo il problema di Cauchy

$$(P) : \begin{cases} y'(t) = t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Sappiamo già quali sono le soluzioni dell'equazione differenziale: imponendo la condizione inziale $y(0) = \frac{0^3}{3} + c = 2$, si ricava che $c = 2$ e quindi l'unica soluzione che verifica il problema di Cauchy è

$$y(t) = \frac{t^3}{3} + 2.$$

[1] Può sembrare una richiesta molto banale che la soluzione esista e sia unica, ma in generale per problemi di questo tipo più complicati non è così.

$\diamondsuit$ **3** Consideriamo il problema di Cauchy

$$(Q) : \begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Il *Teorema 3* delle dispense del laboratorio ci assicura che per tale problema la soluzione esiste ed è unica. Per trovarla, possiamo iniziare ricordando che la funzione

$$\overline{y}(t) = e^{\alpha t}$$

ha come derivata $\overline{y}'(t) = \alpha e^{\alpha t}$, e risolve quindi l'equazione

$$y'(t) = \alpha y(t).$$

Potremmo quindi aspettarci che la soluzione si trovi tra le funzioni della forma

$$y(t) = e^{2t} + c$$

con c una costante reale.
D'altra parte, in tal caso vale $y'(t) = 2e^{2t}$, e pertanto

$$y'(t) = 2e^{2t} \neq 2e^{2t} + 2c = 2y(t)$$

se $c \neq 0$. Dobbiamo allora cercare un'altro approccio: proviamo a usare la proprietà (ii) della linearità e cercare una soluzione del tipo

$$y(t) = Ae^{2t} \text{ con } A \text{ costante reale}$$

Verichiamo che la soluzione appena definita soddisfa l'equazione:

$$y'(t) = 2Ae^{2t} = 2(Ae^{2t}) = 2y(t).$$

Per trovare infine una soluzione del problema di Cauchy, imponiamo

$$y(0) = Ae^{2\cdot 0} = A \cdot 1 = 4$$

da cui si ricava $A = 4$. Quindi la soluzione di (Q) è

$$y(t) = 4e^{2t}.$$

$\diamondsuit$ **3** Provate adesso a trovare in maniera analoga una soluzione del problema di Cauchy

$$(R) : \begin{cases} y'(t) = 7y(t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

e a generalizzare tale risultato a

$$(S) : \begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad .$$

2.3 Un modello di popolazione

Vediamo infine come l'esempio ♢ **3** si applica a un caso concreto di *dinamiche di popolazione*.
Consideriamo il lievito madre. Come riportato in [2], il lievito madre "è un impasto di farina e acqua sottoposto a una contaminazione spontanea da parte dei microrganismi presenti nelle materie prime, provenienti dall'aria e dall'ambiente, il cui sviluppo crea all'interno della massa una microflora batterica autoctona in cui predomina la coltura dei batteri lattici. Questi microrganismi, in competizione nutrizionale tra loro in una realtà artigianale, in presenza di sostanze nutritive, di acqua, calore, ecc., crescono, si moltiplicano, avviano gli specifici processi metabolici della specie cui appartengono".
In sostanza quindi, ci aspettiamo che nel lungo periodo i batteri lattici divengano predominanti e continuino a riprodursi in maniera proporzionale al numero di individui presente. Se quindi $y(t)$ è il numero di batteri lattici presenti al tempo t, possiamo modellizzare la loro crescita con il problema di Cauchy

$$(B) : \begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

dove $\alpha > 0$ è il fattore di proporzionalità e $y_0 > 0$ è il numero di individui iniziali. Cosa osserviamo di tale soluzione?
Il numero di individui al tempo t è

$$y(t) = y_0 e^{\alpha t}$$

ed essendo α un numero positivo, abbiamo che tale colonia si riproduce all'infinito, per cui il numero di individui aumenta nel tempo.

Riferimenti bibliografici

[1] M. G. Ghimenti, *Da Thanos agli zombies: derivate e dinamiche di popolazione.*

[2] Wikipedia, *Lievito naturale*, `https://it.wikipedia.org/wiki/Lievito_naturale`.