12-2-2020

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	B	B	A	D	C	B	B	D
II								
III	C	B	D	C	C	B	B	A
IV								

ESERCIZIO 1.[5]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Supponiamo che l'equazione $f(x) = 0$ abbia n soluzioni isolate. Si dimostri che allora l'equazione $f'(x) = 0$ ha almeno $n - 1$soluzioni isolate.

Si usi questo per dimostrare che un se un polinomio $p(x)$ di grado n ha $n+1$ zeri distinti, allora $p(x)$ è il polinomio nullo.

R: (cenno) Per la prima parte si usi il teroema di Rolle. Per la seconda parte si proceda per induzione sul grado del polinomio.

ESERCIZIO 2. [6]

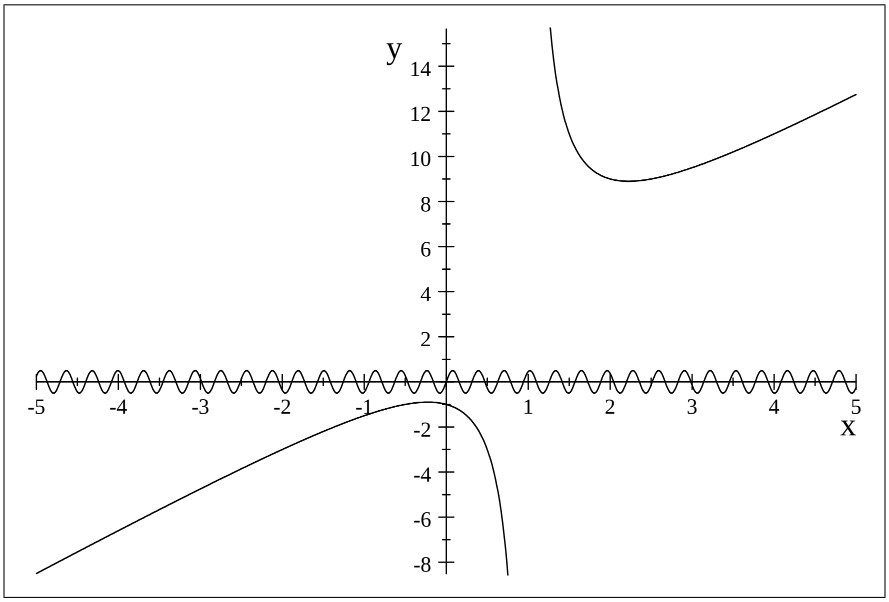
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-1}$.

- Si tracci un grafico approssimativo di f trovandone massimi e minimi locali.
- E' vero che esiste un $m \in \mathbb{R}$ tale che l'equazione

  $$f(x) = m \sin(20x)$$

  non ha soluzioni?
- La serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f(i)}$ converge?

R:(cenno)



Basta che m sia minore del valore assoluto del massimo locale negativo della f. La serie non converge perché $\frac{1}{f(i)} \sim \frac{1}{2i}$.

ESERCIZIO 3. [5]
Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \max(1, y) \\ y(0) = a \end{cases}$$

Si determini per quali a si ha soluzione unica del problema e per quali a le soluzioni trovate sono funzioni strettamente convesse.

R:(cenno) La soluzione è sempre unica (applicare il teorema di unicità). Le soluzioni sono rette a pendenza 1 per $y < 1$, poi diventano esponenziali. Nessuna di queste è quindi strettamente convessa.

ESERCIZIO 4 (colloquio integrativo sulle serie)
Si studi la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^{\log(n)}}$$

R:Si nota che $(\log(n))^{\log(n)} = e^{\log n \log\log n} = n^{\log\log n} \geq n^2$ definitivamente. Da questo segue che la serie converge.