7-1-2020

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	C	C	C	A	A	B	C	A
II	B	A	C	C	C	C	B	B
III	C	A	A	A	D	C	C	A
IV								

ESERCIZIO 1.[6]

a) Per quali valori del parametro m, l'equazione

$$e^x = mx$$

ha soluzioni nell intervallo $[0,1]$?

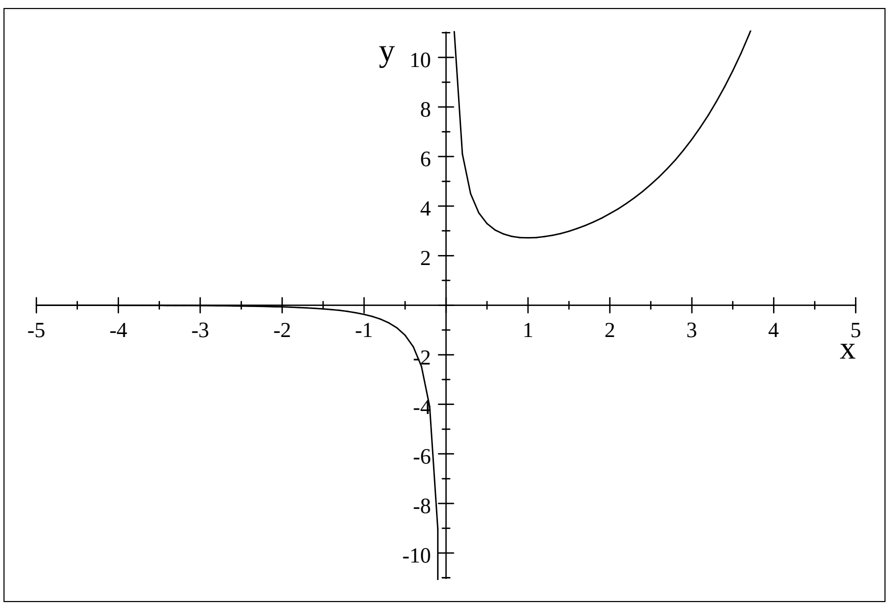
b) Quante soluzioni ha l'equazione su $\mathbb{R}$ al variare di m?

R: Esporremo due possibili linee di ragionamento

1) Consideriamo $e^x = mx$,notiamo che $x = 0$ non può essere soluzione in nessun caso. Quindi supponendo $x \neq 0$ possiamo trasformare l'equazione in

$$\frac{e^x}{x} = m.$$

Studiamo quindi la funzione $f(x) = \frac{e^x}{x}$.



Tramite la solita procedura otteniamo un grafico come quello in figura.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^x (x-1)$$

Si trova facilmente che per $x > 0$ c'è un minimo in $x = 1$ con valore $f(1) = e$.

Da questo otteniamo che ci sono soluzioni in $[0,1]$ se $m \geq e$. (risposta alla domanda a)

Considerando la domanda b) analogamente a quanto appena fatto e con i soliti ragionamenti si ottiene che per $m < 0$ c'è 1 soluzione (negativa), per $0 \leq m < e$ nessuna soluzione, per $m = e$ 1 soluzione, per $m > e$ 2 soluzioni.

2) Se $x \geq 0$ e $m \leq 0$ l'equazione non ha soluzioni. Consideriamo $m > 0$ e la funzione

$$f(x) = e^x - mx$$

con $x \in [0,1]$e cerchiamo zeri di questa funzione. Si ha che $f(0) = 1$, $f(1) = e - m$. Per cui per $m \geq e$ abbiamo sicuramente almeno una soluzione dell'equazione in $[0,1]$. Ci potrebbero essere anche altre soluzioni, per cercarle cerchiamo il minimo di $f(x)$ al variare di m e vediamo se può essere negativo (in quel caso ci saranno soluzioni).

Si ha che $f'(x) = e^x - m$ e $f''(x) = e^x > 0$ per cui f è convessa.

Da questo abbiamo che i punti dove $f'(x) = 0$ sono punti di minimo. Si tratta dei punti per cui $e^x = m$, $x = \log(m)$ che ha soluzione in $[0,1]$ per $1 \leq m \leq e$.

In questi punti $f(x) = m - m\log(m) = m(1 - \log m)$. $1 - \log m \leq 0$, $\log(m) \geq 1$, otteniamo ancora $m \geq e$. Quindi non ci sono altre soluzioni.

b) studiando $f(x)$ abbiamo scoperto che questa è convessa e ha un minimo > 0 per $m < e$, il minimo in 0 per $m = e$ e il minimo negativo per $m > e$. Dai cui non ci sono soluzioni per l'eqauzione nel primo caso, 1 nel secondo e 2 nel terzo.

ESERCIZIO 2. $[4-5]$

Sia $f \in C^0[a,b]$. Dimostrare che se

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

allora esite $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

R:(cenno) essendo f continua, se non ci fossero zeri questa sarebbe o tutta positiva o tutta negativa. In ognuno dei due casi l'integrale non può essere zero. (perché....)

ESERCIZIO 3. [5]

Si determini se esistono funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfacenti i seguenti insiemi di condizioni:

1. $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$
2. $\lim_{n\in\mathbb{N},n\to\infty} f(n) = 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} f(n) = +\infty$
3. $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(x) = 2f'(x)$, $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$

Per ogni insieme di condizioni si forniscano esempi soddisfacenti le condizioni o argomenti che dimostrano che questi esempi non esistono.

R:(cenno) $1) f(x) = \begin{cases} \log(x) \ se \ x \geq 1 \\ x-1 \ se \ x < 1 \end{cases}$, 2) $f(x) = x^{-1}$, 3) $f(x) = 0$.