3-6-2019

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	C	C	A	C	C	C	A	B
II	C	A	A	B	A	C	A	C
III								-
IV								

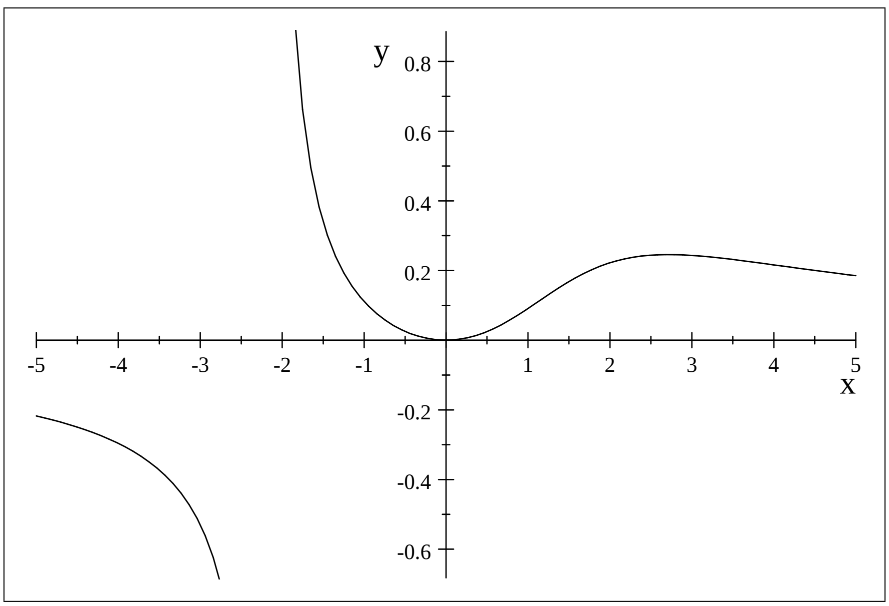
ESERCIZIO 1.[5] Si trovi il valore massimo, se esiste della successione

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+10}$$

con $n \in \mathbb{N}$.

R: Si studia sui reali positivi la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+10}$$



che estende la successione ai reali. Questa è derivabile e $\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{x^3+10}) = -\frac{x}{(x^3+10)^2}\left(x^3-20\right)$. La funzione sui reali positivi risulta crescente fino a al punto $\sqrt[3]{20}$ e poi decrescente. Inoltre $2 < \sqrt[3]{20} < 3$. Quindi il massimo esiste e $\max a_n \in \{a_2, a_3\}$. Calcolando i due valori si ha $a_2 = \frac{4}{8+10} < a_3 = \frac{9}{27+10}$ quindi il massimo è a_3.

ESERCIZIO 2. [5]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile 2 volte. Si supponga che $f^{''}(x) \geq 0$ per ogni x e che esistano M_1 e $M_2 \in \mathbb{R}$ tali che $M_1 \geq f(x) \geq M_2$ per ogni x. Dimostrare che allora f è una funzione costante.

R: Se f non è costante ci sarà un qualche punto x_0 dove $f^{'}(x_0) \neq 0$. Se $f^{'}(x_0) = c > 0$ si ha che $f^{'}(x) \geq c$ per ogni $x \geq c$ da cui $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Analogamente si ragiona se $f^{'}(x_0) < 0$ ottenendo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. Quindi f se non è costante non può essere limitata.

ESERCIZIO 3. [5]

Trovare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) = \int_0^x f(t)dt$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

R: Chiaramente si ha $f(0) = 0$ e $f^{'}(x) = f(x)$, da cui l'unica soluzione (problema di Cauchy) è $f(x) = 0 \ \forall x$.