Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2
29-2-2019

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I								
II	D	A	C	A	C	D	A	D
III								
IV								

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 [3] Si considerino le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$: determinare una matrice C tale che $C^{-1}BC = A$.

R: A è simmetrica, quindi si diagonalizza con tramite una C ortogonale. Per trovare questa C troviamo autovettori e autovalori $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \leftrightarrow 3.$

Notando che questi formano una base ortogonale, normalizzandoli e costruendo con questi il cambio di base che diagonalizza la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 2 [4] Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dai vettori (x, y, z) tali che $x + y = 0$. Determinare una base ortogonale di U rispetto al prodotto scalare canonico. Determinare la matrice associata alla proiezione ortogonale $\pi : \mathbb{R}^3 \to U$.

R I vettori $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ed $(0, 0, 1)$ appartengono ad U e formano una base ortonormale di U. Per scrivere la matrice associata alla proiezione, applichiamo la proiezione alla base canonica.

$e_1 \to -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ $e_2 \to \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $e_3 \to e_3$ dunque la matrice è $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1.[4] Si consideri una successione $p_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ (dove $\mathbb{N}$ rappresenta gli interi non negativi) definita da $p_n = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}$. Si considerino per ogni punto p_n i quadrati $Q_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \le \frac{1}{10}, \exists n \in \mathbb{N}\ t.c.\ |y - n| \le \frac{1}{10}\}$ di centro p_n e lato $\frac{1}{10}$. Si consideri l'insieme unione di tutti questi quadrati $B = \cup_{i \in \mathbb{N}} Q_n$. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1\ se\ (x, y) \in B \\ 0\ se\ (x, y) \notin B \end{cases}$$

1) In quale dominio è definita la f? E' continua, differenziabile, limitata, ha massimo o minimo?

R: Non continua, limitata.. Il massimo è 1 il minimo è 0.

2) Sia $x_n \in \mathbb{R}^2$ una successione tale che $||x_n|| \to \infty$, quali sono i possibili valori di $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$? (quando il limite è definito) ci sono successioni per cui il limite non è definito?

R: 1 o 0,si ci sono .

3) Si calcoli $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} f\ dxdy$

R:$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} f\ dxdy = \frac{1}{400}$ l'area dell intersezione fra Q_0 e il quadrante positivo.

4) Si consideri adesso la stessa costruzione per una successione qualsiasi x_n. I quadrati Q_n di centro x_n e lato $\frac{1}{10}$ associati a questa successione. Si consideri l' unione di tutti questi quadrati $B_2 = \cup_{i \in \mathbb{N}} Q_n$ E una g definita come prima

$$g(x, y) = \begin{cases} 1\ se\ (x, y) \in B_2 \\ 0\ se\ (x, y) \notin B_2 \end{cases}$$

è possibile trovare una x_n tale che g sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

R: Si, questo succede quanto $B_2 = \mathbb{R}^2$ e quindi la funzione è costante. (come x_n si prenda una successione che ha immagine su una griglia di quadrati di lato 1).

ESERCIZIO 2.[4] Sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$E = \{(x, y, z) |\ -1 \le y \le 0, 0 \le z \le 4 - x^2\}$$

1) Si rappresenti E con un disegno approssimativo. Si calcoli il volume di E.

R: E è un insieme prodotto di una porzione di piano e un intervallo. Pertanto

$$\begin{aligned} Vol(E) &= area\ base \times altezza \\ &= 1 \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

2) Si consideri la funzione $f : E \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y, z) = z^2$. f ha un massimo (su E)? in caso affermativo trovarlo.

Si consideri la funzione $g : E \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y, z) = y + x \sin(xy)$. g ha un massimo (su E)?

R: $\max(f) = 16$, g ha massimo perché è continua ed E è compatto.