**Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2**
**4-02-2019**

| * | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | D | A | C | A | B | A | B | D |
| II | | | | | | | | |
| III | | | | | | | | |
| IV | | | | | | | | |

**Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta:** la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

**ESERCIZIO 1 (4 pt)**

1. Determinare se la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ è combinazione lineare delle matrici $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

   R: non lo è in quanto qualsiasi combinazione lineare delle tre avrebbe 0 nella posizione in basso a sinistra.

2. Si consideri l'insieme $C$ di tutte le possibili combinazioni lineari a coefficienti reali delle matrici $A_1, A_2, A_3$. L'insieme $C$ è uno spazio vettoriale? In caso affermativo calcolarne la dimensione.

   R: E' uno spazio vettoriale, visto che le matrici sono linearmente indipendenti, ha dimensione 3.

3. L'insieme $\{A_1, A_2, A_3\}$ genera lo spazio $M_{2,2}$ delle matrici reali 2×2? E' un insieme indipendente? in caso affermativo completarlo ad una base di $M_{2,2}$.

   R: E' un insieme indipendente ma non può generare $M_{2,2}$ che ha dimensione 4. Base di $M_{2,2} : \{A_1, A_2, A_3, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$;

- **ESERCIZIO 2 (4 pt)**

Si consideri l'insieme $P_2(t)$ dei polinomi (reali) in $t$ aventi grado minore o uguale a 2 con la base $\{1, t, t^2\}$.

Si consideri $A : P_2(t) \to P_2(t)$ tale che

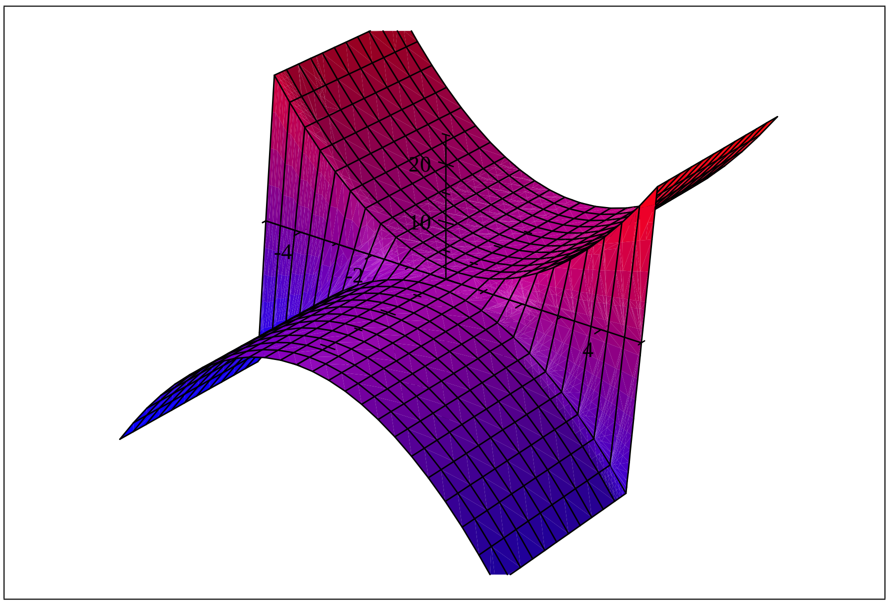
$$A(p) = t^2 p(0)$$

- $A$ è una applicazione lineare? (spiegare la risposta data)
-Trovare l'immagine di $A$ e il $\ker(A)$

**Analisi 2. Esercizi a risposta aperta:** la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

**ESERCIZIO 1.[4]** Si consideri la funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \; se \; y \geq 0 \\ -x^2 \; se \; y < 0 \end{cases}$$




1) Si calcoli $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. In quale dominio è continua? è limitata?

R: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. E'ontinua su .$\mathbb{R}^2 - \{(x,y)|y = 0, x \neq 0\}$,non è limitata.

2) Quali sono il $sup$ e l'$inf$ della funzione? ci sono minimi locali?

R:$sup\ f = \infty$ inf $f = -\infty$. Ci sono minimi locali in ogni punto dell insieme $\{(x,y)|y > 0, x = 0\}$ci sono massimi locali in ogni punto di $\{(x,y)|y < 0, x = 0\}$

3) Sia $x_n \in \mathbb{R}^2$ una successione tale che $||x_n|| \to \infty$, quali sono i possibili valori di $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$?

R:Il limite può assumere per qualsiasi valore reale o anche $\pm\infty$.

**ESERCIZIO 1.[4]** Si consideri un campo vettoriale $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che sia $C^1$ e soddisfacente alla seguente condizione: "tutti i vettori del campo hanno direzione parallela alla retta $y = x$".

- Si formalizzi la condizione proposta e si determini se esistono campi che la soddisfano e in caso quanti ne esistono.

  R: Essendo fissata la direzione del vettori del campo, resta libera la lunghezza, che può essere qualsiasi. Quindi ci sarà una $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che il campo è dato da

$$F(x, y) = l(x, y)e_1 + l(x, y)e_2.$$

C'è quindi una famiglia infinita di campi soddisfacenti alla richiesta.

- Un campo siffatto deve essere necessariamente conservativo? (lo si dimostri o si producano controesempi)

  R:No, non è necessariamente conservativo. Si consideri il campo dato da $.l(x, y) = y - x$ e si provi a calcolare il rotore.

- Nei casi in cui il campo di cui sopra è conservativo ed ha un potenziale $U$, che relazione c'è fra le linee di livello del potenziale e la retta $y = x$?

  R: Le linee di livello sono sempre prependicolari al gradiente che per definizione è il campo.