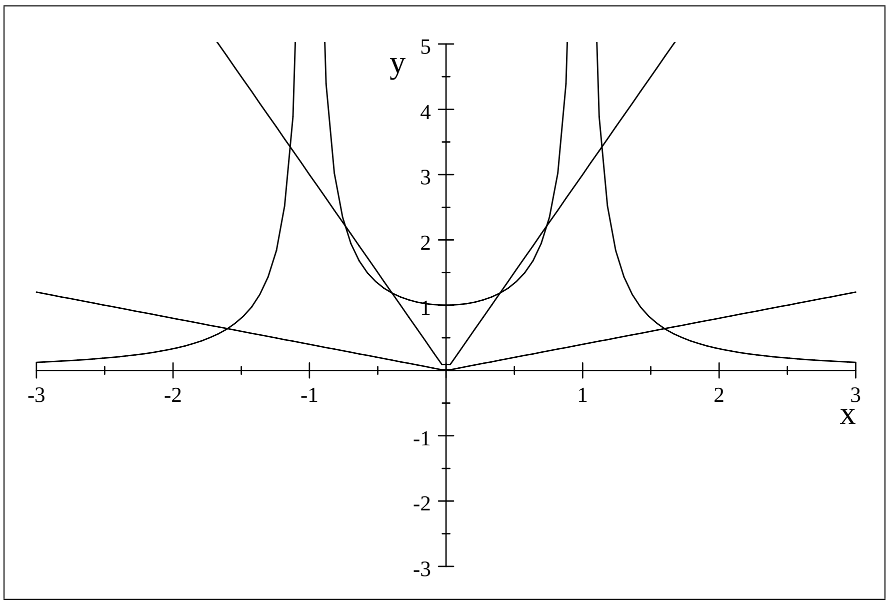
15-1-2019

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	B	C/D	C	D	C	B	B	C
II	D	B	D	D	D	C	C	C
III								
IV								

ESERCIZIO 1.[8] Sia $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = \left|\frac{1}{x^2 - 1}\right|$$



- [3] Si detemini se la f è continua e derivabile sul suo dominio, se ne studi il comportamento, se ne tracci un grafico.
- [3] Si consideri per ogni $\alpha \geq 0$ l'equazione

  $$f(x) = \alpha|x|$$

  e si determini quante soluzioni ha l'equazione al variare di α.

  Sfruttando la simmetria del problema consideriamo $x \geq 0$ e il problema $\frac{1}{x^2-1} = \alpha x$, da cui $\frac{1}{\alpha} = x(x^2-1)$ con $x \neq \pm 1$. Questa ha 1, 2 o 3 soluzioni reali le soluzioni sono 3 se
  $\frac{d(x(x^2-1))}{dx} = 3x^2 - 1 \;\; 3x^2 - 1 = 0 \; x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \;\; \alpha \geq \sqrt{3}$.
- [2] Si calcoli se esiste $\int_2^\infty f(x)$.

- $\int \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1)$
  $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln 3$

ESERCIZIO 2.[7] Sia $f : \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x + x^2$$

- [3] Si consideri l'equazione differenziale

  $$y' = y + f(x)$$

  e se ne trovino le soluzioni.

  R:L'equazione è lineare del primo ordine. Insieme delle soluzioni: $\left\{C_2 e^x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x - 2x - x^2 - 2\right\}$

- [4] Si consideri la successione definita per ricorrenza

  $$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = 0.1 \end{cases}$$

  e se ne calcoli il limite.

R: Dato che $f'(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + 2x$, per $|x| \leq \frac{1}{2}$ si ha $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$, per cui $|f(x)| \leq \frac{3}{4}|x|$ per $|x| \leq \frac{1}{2}$. Questo implica che se $|x_0| \leq \frac{1}{2}$ allora $|x_n| \leq [\frac{3}{4}]^n |x_0|$ e quindi $x_n \rightarrow 0$ esponenzialmente.