Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2
15-01-2019

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	A	A	A	D	C	B	A	D
II	B	B	A	B	C	D	A	D
III								
IV								

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 (4 pt) Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Sia $F : V \to W$ lineare. Si consideri un insieme $A = \{v_1, ..., v_n\}$ di vettori in V. Si discutano le seguenti affermazioni, dimostrando che sono vere quando è il caso, o trovando dei controesempi.

1. Se A non è linearmente indipendente allora $F(A) = \{F(v_1), ..., F(v_n)\}$ non è linearmente indipendente

   R: Vera: se $\sum \lambda_i v_i = 0$ con quanche $\lambda_i \neq 0$ allora per le solite proprietà di linearità $\sum \lambda_i F(v_i) = 0$. Molti si sono arrampicati sugli specchi in discorsi lunghissimi e inconcludenti.

2. Se A è linearmente indipendente e F è iniettiva, allora $F(A)$ è linearmente indipendente.

   R:Vera: Se $\sum \lambda_i F(v_i) = 0$ allora $F(\sum \lambda_i v_i) = 0$ se F è iniettiva allora $\sum \lambda_i v_i = 0$ e i v_i non sono indipendenti.

   Questi passaggi sono stati fatti e ripetuti in molte dimostrazioni della prima parte del corso.

ESERCIZIO 2 (4 pt) Si considerino $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ dati da $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si consideri lo spazio V generato da v_1 e v_2 e lo spazio W generato da v_3 e v_4. Si determinino delle basi per $V + W$ e per $W \cap V$.

R:Chiaramente V e W hanno dimensione 2. Si vede subito che $v_2 \in W$. D'altra parte v_1, v_3, v_4 sono chiaramente indipendenti. Da questo $\dim(V + W) = 3$ e $V + W = span(v_1, v_3, v_4)$.

Abbiamo notato che $v_2 \in W$ quindi $v_2 \in W \cap V$, ma $\dim(W \cap V) = 1$ (per quale nota formula fatta a lezione?) quindi v_2 è base di $W \cap V$.

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1.[5+] Si consideri la seguente condizione:
"La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è tale che il gradiente di f nel punto di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è parallelo al vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e di norma costante".

Si determini se esiste una funzione che soddisfa la suddetta condizione.

Si determini se esiste una funzione continua su $\mathbb{R}^2$ che soddisfa la suddetta condizione.

Si determini se esiste una funzione differenziabile su $\mathbb{R}^2$ che soddisfa la suddetta condizione.

Si caratterizzi l'insieme delle funzioni soddisfacenti alla condizione

R:Se $\bigtriangledown f$ è parallelo a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in ogni punto, allora $\bigtriangledown f = g(x,y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ per qualche g a valori reali. in questo caso $|| \bigtriangledown f|| = |g(x,y)|\sqrt{x^2+y^2}$. Se $|g(x,y)|\sqrt{x^2+y^2} = C$ allora $|g(x,y)| = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e se si suppone g continua si ha per $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ $\bigtriangledown f = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Da questo si ha che le f continue che soddisfano la condizione sono del tipo $f(x,y) = C_1 + C_2\sqrt{x^2+y^2}$. Ovviamente a parte il caso $C_2 = 0$ nessuna di queste è differenziabile nell'origine.

Da questo segue che

ESERCIZIO 2.[4]

Calcolare

$$\int\int\int_D 2z dx dy dz$$

dove $D = \{(x,y,z)\ t.c.\ \sqrt{y^2+x^2} \le z^2, 2 \le z \le 4\}$, compreso tra $z=2$ e $z=4$.

R: Facendo l'integrale "a fette" lungo l'asse z come nel compito precedente. si ha che ogni fetta è un disco di raggio z^2 e area πz^2

da cui

$$\int\int\int_D 2z dx dy dz = \int_2^4 2z\pi z^4 dz = 1344\pi.$$