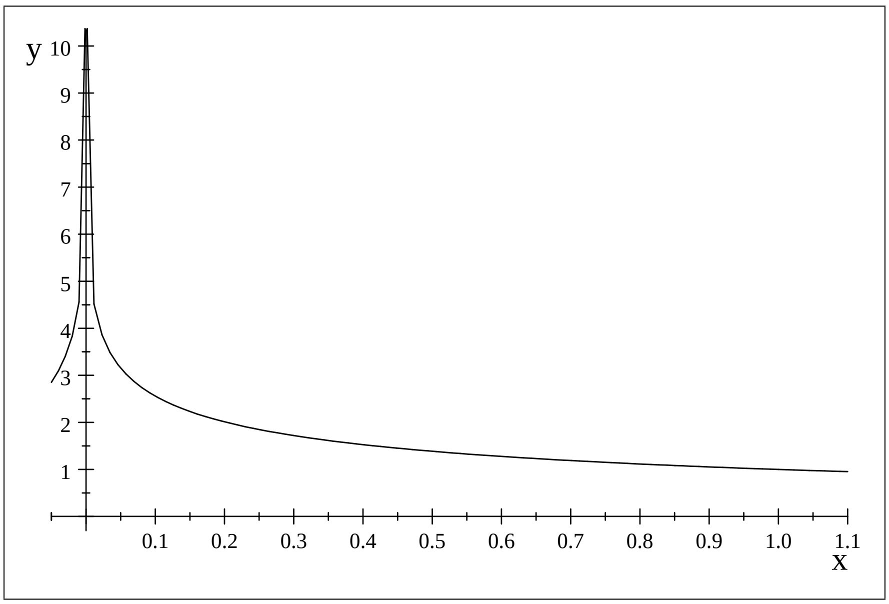
15-1-2019

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	D	B	A	D	A	A	B	B
II	D	C	A	D	C	A	A	C
III								
IV								

ESERCIZIO 1.[10] Sia $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log|x|}{x-1} & se \;\; x \neq 1 \\ 1 & se \; x = 1 \end{cases}$$



- [1] Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} f(x);\ \lim_{x\to 1} f(x);\ \lim_{x\to -\infty} f(x);\ \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

$\lim_{x\to 1} \frac{\ln|x|}{x-1} = 1$ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{x-1} = \infty$ $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln|x|}{x-1} = 0$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln|x|}{x-1} = 0$

- [1] determinare se la f è continua nel dominio.

  Si, dato che $\lim_{x\to 1} \frac{\ln|x|}{x-1} = f(1)$, la funzione è continua nel suo dominio.

- [3] La funzione è derivabile sul suo dominio?

  In tutti i punti x,con $x \neq 1$ la funzione è chiaramente derivabile. In 1 si calcolando il rapporto incrementale si ha $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = -\frac{1}{2}$ quindi la funzione viene derivabile, con derivata $-\frac{1}{2}$

- [1] Quante sono le soluzioni di $f(x) = 1$?

  Due soluzioni (procedimento standard).

- [2] Si determini se esiste $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\, dx$

  Si tratta dell'integrale di una funzione positiva. La funzione tende a zero, e definitivamente $f(x) \geq \frac{1}{x}$, per cui l'integrale dverge.

- [2] Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(\frac{1}{n})}$. Se ne studi la convergenza.

  La serie ha il carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ quindi diverge.

ESERCIZIO 2. [6]

- [3] E' vero che se in $[1, \infty)$ si ha $f > g$, allora $\forall x \in [1, \infty)$ si ha che $\int_1^x (f(t))^3 dt \geq \int_1^x (g(t))^3 dt$? Quali ipotesi servono su f e g? (giustificare le risposte)

  Si (fatto a lezione per le funzioni integrabili)

- [3] Si dimostri che $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$ per $x \geq 1$

  In 1 abbiamo $1 - \frac{1}{x} = \ln x = 0$, per $x > 1$ si ha $\frac{d(1-\frac{1}{x})}{dx} = \frac{1}{x^2} \leq \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ e quindi applicando quanto scritto sopra...