**Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2**
**03-07-2018**

| * | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | C | B | A | D | A | B | B | B |
| II | C | B | A | A | C | B | B | B |
| III | | | | | | | | |
| IV | | | | | | | | |

**Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta:** la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

**ESERCIZIO 1 (4 pt)** Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare. Si consideri un insieme $A = \{v_1, ..., v_n\}$ di vettori in $\mathbb{R}^2$. Si discutano le seguenti affermazioni, dimostrando che sono vere quando è il caso, o trovando dei controesempi.

1. Esiste una tale $F$ e un insieme $A$ che non è linearmente indipendente tale che $F(A) = \{F(v_1), ..., F(v_n)\}$ è linearmente indipendente

   R: falso, l'immagine di un insieme dipendende tramite una applicazione lineare è sempre dipendente.

2. Se $A$ è linearmente indipendente allora $F(A)$ è linearmente indipendente.

   R: falso, si consideri l'applicazione che manda tutto in zero, per esempio.

**ESERCIZIO 2 (4 pt)** Si considerino $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ dati da $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si consideri lo spazio $V$ generato da $v_1$ e $v_2$ e lo spazio $W$ generato da $v_3$ e $v_4$. Si determinino delle basi per $V + W$ e per $W \cap V$.

R:Chiaramente $V$ ha dimensione 1 e $W$ ha dimensione 2. Si vede subito che $V \subseteq W$. Da questo $\dim(V + W) = 2$ e $V + W = span(v_3, v_4)$.

Visto che $V \subseteq W$ allora $W \cap V = V$ quindi $v_2$ è base di $W \cap V$.

**Analisi 2. Esercizi a risposta aperta:** la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

**ESERCIZIO 1.[5]**
Si consideri la funzione $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + x^2 \\ x + y \end{pmatrix}$$

1. [1] $f$ è una funzione continua? è differenziabile in tutti i punti? è differenziabile in $(0,0)$?

   R:Si, soliti discorsi.

2. [1] Si calcoli la matrice che rappresenta il differenziale di $f$ in $(x,y)$?

   R:$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. [1] In quali punti $(x,y)$ il differenziale è invertibile?

4. [2] Si considerig $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = ||f(x,y)||$.

   Si determini se $g$ ha massimo sulla palla $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \le 1\}$ e se ne calcoli il valore.

**ESERCIZIO 2.[3]**
Si consideri il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $F(x,y,z) = 2xe_1 + 3xe_2 + ze_3$. Si calcoli il flusso di questo campo lungo la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1\}.$$

Si spieghi brevemente il metodo usato per arrivare al risultato.

R: un metodo veloce è notare che la divergenza del campo è 3 e integrarla all'interno dell ellissoide contenuto nella superficie. Un modo veloce di fare questo è con un cambio di coordinate che porti la sfera unitaria nell ellissoide (fatto in classe).