

**Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra
Lineare e Analisi 2**

03-07-2018

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	A	A	A	D	C	B	A	D
II	C	A	A	A	C	D	B	D
III	A	B	A	B	C	D	A	D
IV								

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 (4 pt) Siano V e W due spazi vettoriali su \mathbb{R} . Sia $F : V \rightarrow W$ lineare. Si consideri un insieme $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori in V . Si discutano le seguenti affermazioni, dimostrando che sono vere quando è il caso, o trovando dei controesempi.

1. Se A non è linearmente indipendente allora $F(A) = \{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ non è linearmente indipendente

R: Vera: se $\sum \lambda_i v_i = 0$ con qualche $\lambda_i \neq 0$ allora per le solite proprietà di linearità $\sum \lambda_i F(v_i) = 0$. Molti si sono arrampicati sugli specchi in discorsi lunghissimi e inconcludenti.

2. Se A è linearmente indipendente e F è iniettiva, allora $F(A)$ è linearmente indipendente.

R: Vera: Se $\sum \lambda_i F(v_i) = 0$ allora $F(\sum \lambda_i v_i) = 0$ se F è iniettiva allora $\sum \lambda_i v_i = 0$ e i v_i non sono indipendenti.

Questi passaggi sono stati fatti e ripetuti in molte dimostrazioni della prima parte del corso.

ESERCIZIO 2 (4 pt) Si considerino $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ dati da $v_1 =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Si consideri lo spazio } V$$

generato da v_1 e v_2 e lo spazio W generato da v_3 e v_4 . Si determinino delle basi per $V + W$ e per $W \cap V$.

R: Chiaramente V e W hanno dimensione 2. Si vede subito che $v_2 \in W$. D'altra parte v_1, v_3, v_4 sono chiaramente indipendenti. Da questo $\dim(V + W) = 3$ e $V + W = \text{span}(v_1, v_3, v_4)$.

Abbiamo notato che $v_2 \in W$ quindi $v_2 \in W \cap V$, ma $\dim(W \cap V) = 1$ (per quale nota formula fatta a lezione?) quindi v_2 è base di $W \cap V$.

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1.[4] Si consideri un campo vettoriale $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che sia C^1 e soddisfacente alla seguente condizione: "tutti i vettori del campo hanno direzione parallela alla retta $y = x$ ".

- Si formalizzi la condizione proposta e si determini se esistono campi che la soddisfano e in caso quanti ne esistono.

R: Essendo fissata la direzione dei vettori del campo, resta libera la lunghezza, che può essere qualsiasi. Quindi ci sarà una $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che il campo è dato da

$$F(x, y) = l(x, y)e_1 + l(x, y)e_2.$$

C'è quindi una famiglia infinita di campi soddisfacenti alla richiesta.

- Un campo siffatto deve essere necessariamente conservativo? (lo si dimostri o si producano controesempi)

R:No, non è necessariamente conservativo. Si consideri il campo dato da $l(x, y) = y - x$ e si provi a calcolare il rotore.

- Nei casi in cui il campo di cui sopra è conservativo ed ha un potenziale U , che relazione c'è fra le linee di livello del potenziale e la retta $y = x$?

R: Le linee di livello sono sempre perpendicolari al gradiente che per definizione è il campo.

ESERCIZIO 2.[4]

Calcolare

$$\int \int \int_D 2z dx dy dz$$

dove $D = \{(x, y, z) \text{ t.c. } \sqrt{y^2 + x^2} \leq z^2, 2 \leq z \leq 4\}$, compreso tra $z = 2$ e $z = 4$.

R: Facendo l'integrale "a fette" lungo l'asse z come nel compito precedente. si ha che ogni fetta è un disco di raggio z^2 e area πz^2

da cui

$$\int \int \int_D 2z dx dy dz = \int_2^4 2z \pi z^4 dz = 1344\pi.$$