Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2
17-7-2017

*	1	2	3	4	5	6	7	8
II	A	A	C	A	C	D	B	D
I	B	C	D	D	C	A	C/D	B
III	D	C	A	D	D/A	A	B	C
IV								

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 (4 pt)

1. Determinare se la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ è combinazione lineare delle matrici $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

   R: non lo è in quanto qualsiasi combinazione lineare delle tre avrebbe 0 nella posizione in basso a sinistra.

2. Si consideri l'insieme C di tutte le possibili combinazioni lineari a coefficienti reali delle matrici A_1, A_2, A_3. L'insieme C è uno spazio vettoriale? In caso affermativo calcolarne la dimensione.

   R: E' uno spazio vettoriale, visto che le matrici sono linearmente indipendenti, ha dimensione 3.

3. L'insieme $\{A_1, A_2, A_3\}$ genera lo spazio $M_{2,2}$ delle matrici reali 2×2? E' un insieme indipendente? in caso affermativo completarlo ad una base di $M_{2,2}$.

   R: E' un insieme indipendente ma non può generare $M_{2,2}$ che ha dimensione 4. Base di $M_{2,2} : \{A_1, A_2, A_3, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$;

ESERCIZIO 2 (4 pt)

Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $F(\begin{vmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 1 \\ x_1 \\ \cdots \\ x_{n-1} \end{vmatrix}$

[p.es. $F(\begin{vmatrix} 9 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$.]

-E' lineare? è invertibile?

R: l'applicazione non è lineare, infatti non manda lo zero nello zero. Non è invertibile.

-Si consideri l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R}^n | F^3(x) = 0\}$, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$? in caso affermativo, di che dimensione?

R: S è l'insieme vuoto.

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

Problema 1 [5] Si considerino la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$$

e l'insieme $\Omega = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

1. Si determini il dominio della funzione e se ne studino continuità, derivabilità e differenziabilità. Stabilire se f ammette limite quando $|(x,y)|$ diverge ed in caso calcolarlo.

   R: La funzione f è un polinomio, dunque è definita su tutto il piano $\mathbb{R}^2$ e risulta essere di classe C^∞; ciò risponde esaurientemente alla prima parte della domanda, senza necessità di svolgere alcun calcolo. Per quanto riguarda il comportamento limite di f, poiché

   $$1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \leq 1 - \frac{x^2 + y^2}{4} = 1 - \frac{|(x,y)|^2}{4},$$

   per il principio di confronto si ottiene $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = -\infty$.

2. Calcolare

   $$\inf_{\mathbb{R}^2} f, \quad \sup_{\mathbb{R}^2} f, \quad \inf_{\Omega} f \text{ e } \sup_{\Omega} f.$$

   Quali dei precedenti estremi sono raggiunti?

   R: Per il limite calcolato al punto precedente, $\inf_{R^2} f = -\infty$ e chiaramente nessun punto del dominio realizza questo estremo inferiore; inoltre

   $$f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \leq 1$$

   e $f(0,0) = 1$, sicchè $\sup_{\mathbb{R}^2} f = \max_{\mathbb{R}^2} f = f(0,0) = 1$. Per gli altri due estremi, osserviamo che Ω (che non è nient'altro che la regione racchiusa da un'ellisse) è compatto, dunque, per il teorema di Weierstrass, la restrizione di f su Ω ammette massimi e minimi assoluti. Poiché il valore massimo su tutto il piano $\mathbb{R}^2$ è assunto in Ω, deduciamo $\max_{\mathbb{R}^2} f = \sup_\Omega f = \max_\Omega f = f(0,0) = 1$. Infine, poiché in Ω risulta $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$,

   $$f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \geq 0 \quad \text{per ogni } (x,y) \in \Omega;$$

   in particolare, il valore 0 è raggiunto sul bordo dell'ellisse Ω e si conclude $\inf_\Omega f = \min_\Omega f = 0$.

3. Data
$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, z = f(x,y)\},$$
spiegare perché si tratta di una superficie regolare. Calcolare infine il flusso del rotore del campo vettoriale
$$F(x,y,z) = \left(y(1+z^2), 2xy^4z, \sqrt{x^2+z^2}\right)$$
attraverso Σ.

R:Σ è regolare perché espressa in coordinate cartesiane tramite la funzione f, che è C^∞. Calcoliamo il rotore di F:
$$\mathrm{rot}F = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y(1+z^2) & 2xy^4z & \sqrt{x^2+z^2} \end{pmatrix} = \left(-2xy^4, 2yz - \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, 2y^4z - z^2 - 1\right).$$
Un calcolo diretto del flusso del rotore attraverso Σ basato sulla definizione è sicuramente fattibile, ma laborioso; è invece conveniente ricorrere al teorema di Stokes, in virtú del quale il flusso resta invariato se sostituiamo a Σ una qualunque altra superficie con lo stesso bordo. Nel caso in esame, la scelta piú conveniente è considerare $\Sigma_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, z = 0\}$, la cui normale è $\nu_{\Sigma_0} = (0,0,1)$:
$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \nu_\Sigma d\sigma = \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \nu_{\Sigma_0} d\sigma = -\int_\Omega dxdy = -2\pi.$$

Problema 2 [4]. In R^3, sia data la funzione
$$g(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

1. Studiare la differenziabilità di g nell'origine $(0,0,0)$.

   R: La funzione g non è definita nell'origine, dunque *a priori* non ha senso studiarne alcuna proprietà (continuità , derivabilità o differenziabilità che sia). Ciononostante, ci si può chiedere se g ammetta un'estensione $\tilde{g}$ che sia differenziabile nell'origine. Se tale $\tilde{g}$ esistesse, essa dovrebbe essere prima di tutto continua in $(0,0,0)$, ma g non può estendersi ivi per continuità , poichè
   $$\lim_{z\to 0^+} g(0,0,z) = 1 \neq -1 = \lim_{z \to 0^-} g(0,0,z).$$
   Dunque, visto che g non può estendersi per continuità , a maggior ragione non può estendersi per differenziabilità.

2. Posto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, y \geq 0\}$, calcolare
   $$\int_D g(x,y,z)dxdydz.$$

R: Notiamo che g è dispari nella terza coordinata: $g(x, y, -z) = -g(x, y, z)$; grazie a questa simmetria, posto $D^+ = \{(x, y, z) \in D : z \geq 0\}$ e $D^- = \{(x, y, z) \in D : z \leq 0\}$, si ha

$$\int_D g(x,y,z)dxdydz = \int_{D^+} g(x,y,z)dxdydz + \int_{D^-} g(x,y,z)dxdydz = \int_{D^+} g(x,y,z)dxdydz - \int_{D^+} g(x,y$$

dove la seconda uguaglianza proviene dal cambio di coordinate $\Phi : D^- \to D^+$ dato da $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$.

Equivalentemente, se si preferisce un conto esplicito, data la geometria del dominio, si possono utilizzare le coordinate polari: siano dunque $r \in (0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi = [-\pi/2, \pi/2]$ e poniamo $x = r \cos\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \cos\phi$ e $z = r \sin\phi$. Poiché il modulo del determinante della matrice jacobiana di tale cambio di coordinate è pari a $r^2 \cos\phi$, si ottiene

$$\int_D g(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\phi \sin\phi d\phi d\theta dr = 0$$