Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2

26-6-2017

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	D	B	C	D	C	B	D	B
II	B	A	C	D	D	A	A	B
III	A	C	A	D	C	C	D	A
IV								

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 [4] Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali, diagonalizzabile sui reali. Si dimostri che le seguenti sono equivalenti:

1. Esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = Id$
2. $A^2 = Id$.

La situazione sarebbe diversa se i coefficienti fossero complessi?

R: $2 \Longrightarrow 1$ è banale. Vediamo perché $1 \Longrightarrow 2$. Se si ha $A^k = Id$, necessariamente per ogni autovalore λ di A $\lambda^k = 1$. Questo implica che $\lambda \in \{-1, 1\}$,da cui $A^2 = Id$.

Sui complessi la situazione sarebbe stata differente perché in questo caso $\lambda^k = 1$ ha altre soluzioni.

ESERCIZIO 2 [4] Sia V l' insieme delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

1. E' V uno spazio vettoriale reale? in caso si trovi una base di V.

   R: Si, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$è una base.

2. Il sottoinsieme dato dalle matrici che hanno il primo coefficiente $a_{1,1} = 0$ è un sottospazio vettoriale di V?

   R: si verifica facilmente che lo è.

3. Il sottoinsieme di V dato dalle matrici di determinante nullo, è uno sottospazio vettoriale di V?

   R: Non lo è: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ hanno determinante nullo, ma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ non lo ha.

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 [5] Si consideri la funzione di due variabili reali

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

1. Si determini il dominio D della funzione e se ne studino continuità, derivabilità e differenziabilità. stabilire se esiste un'estenzione $\tilde{f}$ della funzione assegnata che sia differenziabile ovunque su $\mathbb{R}^2$.

   R: La funzione non è definita nell' origine. Sulla retta $x = 0$ si ha $f(0, y) = \arctan\left(\frac{y}{|y|}\right)$ per cui non c'è modo di estendere la funzione con continuità.

2. La funzione fè limitata? Quali sono l'estremo superiore l'estremo inferiore di f in D? Esistono punti di massimo e minimo globale?

   R: la funzione è limitata

3. Dato $y_0 \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y) \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

   Per quali y_0 il problema ha un'unica soluzione? Per quali y_0 il problema ha soluzioni stazionarie (ovvero costanti)?

R: per ogni y_0 il problema ha soluzioni locali. Per $y_0 = 0$ si ha una soluzione locale stazionaria.

ESERCIZIO 2.[4] In $\mathbb{R}^3$, sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x + \log(z^2 + 1), y(x^2 + z^2), y^2 + z).$$

1. F è conservativo?

   R: $rot \begin{bmatrix} x + \log(z^2 + 1) \\ y(x^2 + z^2) \\ y^2 + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y - 2yz \\ 2\frac{z}{z^2+1} \\ 2xy \end{bmatrix}$ da cui il campo non è conservativo.

2. Assegnati i parametri reali $h, r > 0$, calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right\}.$$

R: div $\begin{bmatrix} x+\log(z^2+1) \\ y(x^2+z^2) \\ y^2+z \end{bmatrix} = x^2+z^2+2.$, attenzione, Σ non è il bordo di un cilindro, ma solo la superficie laterale.