Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2

5-6-2017

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	A	C	C	D	A	B	C	B
II	D	C	C	D	A	A	B	B
III	D	C	B	A	A	B	A	D
IV								

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 [4] Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} h & 0 & 1 \\ 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & h \end{bmatrix}$. Determinare:

1) $\det(A)$ in funzione di h

R: $1 + h^3$

2) Il rango di A al variare di h

R:Per $h \neq -1$ il rango è 3, altrimenti è 2.

3) Per quali valori di h la matrice è invertibile. In caso contrario si caratterizzi il nucleo.

R: Per $h \neq -1$ la matrice è invertibile. Per $h = -1$ si ha $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, il nucleo in questo caso è generato da $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ESERCIZIO 2 [4] Al variare del parametro$k \in \mathbb{R}$, si consideri $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

1)Calcolare al variare di k gli autovalori di A

2) Determinare per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile.

R: Il polinomio caratteristico è: $(1-t)(-1-t)(k+1-t)$. Gli autovalori quindi sono $1, -1, k+1$.

Quindi se $k \neq 0$ o $k \neq -2$ gli autovalori sono differenti e la matrice è diagonalizzabile. Negli altri casi dobbiamo considerare

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, e calcolando la molteplicità geometrica di 1 si vede che è diagonalizzabile.

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e calcolando la molteplicità geometrica di -1 si vede che NON è diagonalizzabile.

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1.[**5**] Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \log(1 + x^2y^2)$$

1) In quale dominio è definita, continua, differenziabile limitata?

R: La funzione è definita ovunque, continua differenziabile ovunque, non limitata.

2) Se ne trovino e classifichino i punti critici. (sella, massimo minimo)

R: Tutti i punti appartenenti agli assi sono punti critici.Dato che $f \geq 0$, si tratta di minimi deboli locali e globali, in quanto in questi punti la funzione assume il minimo valore che può assumere.

3) Si descrivano le curve di livello della funzione.

R: Dato che il logaritmo è crescente e iniettivo, le curve di livello sono le stesse di $x^2y^2 = K$ Da cui $y = \pm Kx^{-1}$. Si tratta di rami di iperbole.

4) Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \log(1 + x^2y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ha soluzione unica in qualche intorno della condizione iniziale?

R: si

ESERCIZIO 2.[**4**] Trovare una parametrizzazione della curva γ intersezione del cilindro di base ellittica $x^2 + 4y^2 = 4$ e il paraboloide $z = x^2 + y^2$.

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + 4y^2 = 4\}$$

Si consideri il campo vettoriale $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ e si calcoli la circuitazione di V lungo la curva.

R: Si considera una parametrizzazione dell' ellisse di base del cilindro $t \to \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ da questo segue facilmente che γ è parametrizzata da $t \to \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \\ 4\cos^2 t + \sin^2 t \end{pmatrix}$.

Il campo V ha rotore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.Per questo il lavoro lungo γ è dato da $2 * \mathit{area\ ellisse} = 4$.