

Alcuni Esercizi Risolti di Matematica

(e qualche complemento alla teoria)

V. Benci , S. Galatolo.

May 31, 2006

Contents

0.1	Precauzioni e modo d'uso	2
1	Esercizi preliminari	2
1.0.1	Limiti	2
1.0.2	Uso della formula di Taylor nei limiti	6
1.1	Integrali	8
1.2	Funzioni	10
1.3	Algebra Lineare	16
2	Esercizi Piu' Sostanziosi	19
2.1	Funzioni	19
2.1.1	Uno studio di funzione proveniente da un problema ingegneristico.	37
2.2	Integrali,	40
2.3	Equazioni Differenziali	45
2.4	Algebra Lineare	55
2.5	Funzioni di piu variabili	62
2.6	Serie	67
3	Complementi di teoria e metodi pratici per le equazioni differenziali	72
3.1	Teoremi di esistenza ed unicità	72
3.1.1	Qualche esercizio	74
3.2	Equazioni a variabili separabili	74
3.2.1	Qualche esercizio	77
3.3	Equazioni lineari di ordine superiore	77
3.3.1	Qualche esercizio	79
3.4	Equazioni omogenee a coefficienti costanti	80
3.4.1	Qualche esercizio	83
3.5	Metodo della variazione delle costanti	83
3.5.1	Qualche esercizio	86

3.6	Metodo dei coefficienti indeterminati	86
3.6.1	Qualche esercizio	88

0.1 Precauzioni e modo d'uso

In questa dispensa presentiamo alcuni esercizi di matematica, accompagnati da brevi soluzioni e alcuni commenti.

Per la maggiore utilità dello studente quasi tutti gli esercizi sono tratti da prove d'esame da noi proposte nel passato. **La presente versione è preliminare e sicuramente conterrà errori e imprecisioni.** Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci commenti o correzioni al seguente indirizzo:

galatolo@dm.unipi.it

Il miglior modo di utilizzare questa dispensa è quello di cercare di risolvere almeno qualche esercizio per ogni capitolo, evitando di leggere la soluzione immediatamente.

Il lettore cerchi di riflettere su ogni domanda, cercando la **SUA** soluzione e eventualmente facendo qualche calcolo. Le soluzioni presentate sono molto brevi e in esse si spiegano principalmente i passaggi più difficili, sottintendendo le parti più facili. Leggendo, il lettore preparato sarà in grado di completarle nei particolari.

Ad esempio se nella soluzione si trova scritto "facendo i limiti destri e sinistri della derivata si ottiene...", il lettore preparato sarà in grado di capire esattamente di quali limiti si tratta e come questi limiti si calcolano. Il lettore è fortemente invitato a verificare questa sua capacità di completare le soluzioni date.

Qualora il lettore trovasse difficoltà in questo compito, ciò probabilmente sarà dovuto ad una preparazione teorica ancora da perfezionare (ed il lettore è quindi invitato a farlo).

Segnaliamo con una $\diamond$ gli esercizi particolarmente consigliati.

1 Esercizi preliminari

In questi esercizi, adatti per un quiz a risposte multiple, quello che conta è principalmente la comprensione del testo e l'aver capito la teoria.

Lo svolgimento di questi esercizi è in genere immediato, senza molti passaggi (almeno quando si trova la strada giusta).

1.0.1 Limiti

Exercise 1 $\diamond$ *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+x^2} \cdot H(x)$$

dove $H(x)$ è la funzione di Heaviside definita come segue:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

R: Per $x < 0$ la funzione vale sempre 0, quindi in limite cercato è zero.

Exercise 2 $\diamond$ Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \cdot g(x)$$

dove $g(x)$ è come segue:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } x = 0 \\ 0 & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$

R: Il limite proposto è uguale a 0. Infatti la funzione considerata è identicamente uguale a zero in qualsiasi insieme del tipo $(-\epsilon, \epsilon) - \{0\}$.¹

Exercise 3 $\diamond$ Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} [\log(1+x) - \log(1-x)]$$

R.: Si ha che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} [\log(1+x) - \log(1-x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\log(1+x) - \log(1-x)]}{2x}$, che è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Per la regola di de L'Hopital è uguale a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{-1}{1-x} \right) = 1$

Exercise 4 $\diamond$ Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2 \sin x}$$

ove $\lfloor x \rfloor$ denota la parte intera di x : il più grande intero minore o uguale a x .

R: Il limite non esiste, infatti $\frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2 \sin x} = \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2} * \frac{1}{\sin x}$, si vede facilmente che $\frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2}$ tende ad 1 mentre $\frac{1}{\sin x}$ continua sempre a oscillare assumendo tutti i valori in $\mathbf{R} - (0, 1)$, il prodotto dunque continuerà ad oscillare.

Exercise 5 Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x + \sqrt{x}}$$

R: Il limite richiesto fa ∞ . Infatti si ha $\frac{x^2-1}{x+\sqrt{x}} \leq \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x+\sqrt{x}} \leq \frac{x^2}{x+\sqrt{x}}$. La prima e la terza funzione tendono ad ∞ , quindi per il criterio del confronto si ha che anche la seconda tende a ∞ .

¹Facciamo notare che il limite per $x \rightarrow x_0$ è sempre indipendente dal valore assunto dalla funzione in x_0 . Il lettore a cui questa nota genera perplessità rileggi con attenzione la definizione di limite.

Exercise 6 *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2 + x}$$

R: Si ha che $\frac{x^2-1}{x^2+x} \leq \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2+x} \leq \frac{x^2}{x^2+x}$. Dunque per il criterio del confronto il limite proposto fa 1.

Exercise 7 *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor 1 + \frac{1}{x} \rfloor}{\frac{1}{x} + \arctan x}$$

R: Per $x > 1$ il numeratore $\lfloor 1 + \frac{1}{x} \rfloor$ assume sempre il valore 1. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor 1 + \frac{1}{x} \rfloor}{\frac{1}{x} + \arctan x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \arctan x} = \frac{2}{\pi}.$$

Exercise 8 *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor e^x \rfloor}{e^x + \arctan x}$$

R: Avendosi $\frac{e^x-1}{e^x+\arctan x} \leq \frac{\lfloor e^x \rfloor}{e^x+\arctan x} \leq \frac{e^x}{e^x+\arctan x}$ mediante il criterio del confronto si ha che il limite è 1.

Exercise 9 $\diamond$ *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \sqrt{|x|}$$

R: Stiamo considerando il limite di una funzione che oscilla fra 1 e -1 moltiplicata per una funzione che tende a 0. Il limite tenderà a 0.

Exercise 10 $\diamond$ *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \frac{1}{x}$$

R: La funzione data oscilla in ogni intorno di 0 addirittura fra $+\infty$ e $-\infty$ quindi il limite non esiste

Exercise 11 $\diamond$ *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x}$$

R: La funzione data è la somma di una funzione che va a ∞ e di una che oscilla fra 1 e -1, il limite dunque sarà ∞

Exercise 12 *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right) + e^x$$

R: La funzione data è la somma di una funzione che tende a 1 e di una che tende a 0, quindi il limite sarà 1.

Exercise 13 *Si calcoli, se esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - e^x)^2}{x}$*

R: Quella che si presenta non è una forma indeterminata. Vicino a zero la funzione avrà un comportamento simile a quello di $\frac{1}{x}$, quindi il limite non esiste.

Exercise 14 *◇ Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x [t^3] dt}{x}$$

R: Il limite è infinito, infatti $[t^3] \geq t^3 - 1$, quindi $\int_0^x [t^3] dt \geq \int_0^x t^3 - 1 dt = \frac{1}{4}x^4 - x$. Si noti che $\int_0^x [t^3] dt$ non è una funzione derivabile, quindi l'applicazione diretta del teorema dell'Hopital non era possibile.

Exercise 15 *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^x [t] dt}{x^2}$$

R: il limite è 1. Si noti che $x - 1 \leq [x] \leq x$ e si ragioni come sopra.

Exercise 16 *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \log(t+1) dt}{x}$$

R: il limite è infinito (facilmente dalla regola di de L'Hopital).

Exercise 17 *◇ Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\cos x} t dt}{x}$$

R: il limite cercato è 0. Infatti $\int_0^{\cos x} t dt = \frac{1}{2} \cos^2 x$ e quindi il numeratore è una funzione periodica e limitata.

Exercise 18 *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{e^x} t dt}{x}$$

R: Si ha che $\int_0^{e^x} t dt = \frac{1}{2} e^{2x}$, quindi il limite cercato è infinito.

Exercise 19 *Si calcoli*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^t dt}{e^x}$$

R: Il limite cercato è 1 (ovvio).

1.0.2 Uso della formula di Taylor nei limiti

La formula di Taylor consente di approssimare il comportamento di una certa funzione vicino ad un certo punto x_0 con un polinomio di grado n a meno di un resto che tende a zero più velocemente di $(x - x_0)^n$. Si ricorda che stime più precise della grandezza del resto (che determina quanto buona è l'approssimazione) si possono ottenere mediante varie costruzioni (ad es. resto di Lagrange, resto in forma integrale, vedi libro).

E' chiaro che questa formula può essere uno strumento molto potente per calcolare i limiti, infatti essa permette di sostituire una ad una funzione complicata con un polinomio che contiene le caratteristiche principali del comportamento della funzione vicino a x_0 . Il maggior limite nell'applicazione di questo strumento è forse il fatto che la funzione, per essere bene approssiata deve essere derivabile più volte. Lo studioso faccia quindi attenzione prima di applicare la formula. Un altro punto su cui fare attenzione è il fatto che se si vuole approssimare la funzione vicino ad un punto x_0 (per fare il limite per x che tende a x_0) bisogna fare lo sviluppo di Taylor a partire da x_0 (in certi casi si può fare diversamente, ma in questi casi ci vorrà una stima accurata del resto, per assicurare il fatto che il polinomio approssimante approssimi "bene" la funzione anche lontano dal punto iniziale dello sviluppo di Taylor). Vediamo qualche esempio:

Exercise 20 $\diamond$ Si calcoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$

R: Sappiamo che vicino al punto $x = 0$ si ha $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$ con $R_2(x) = o(x^2)$, cioè $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$. Quindi $\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + R_2(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{R_2(x)}{x^2}$ il secondo membro di questa somma tende a zero, grazie alla proprietà del resto ricordata sopra e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Exercise 21 $\diamond$ Si calcoli, se esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x - e^x)^2}{x^2}$

R: Vicino a 0 si ha $\sin(x) = x + R_1(x)$ e $e^x = 1 + x + \bar{R}_1(x)$ con entrambi $R_1(x) = o(x)$ e $\bar{R}_1(x) = o(x)$ quindi $\frac{(1 + \sin x - e^x)^2}{x^2} = \left(\frac{R_1 + \bar{R}_1}{x}\right)^2$, ma per quanto detto prima $\frac{R_1 + \bar{R}_1}{x} \rightarrow 0$.

Exercise 22 Si calcoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x)) - 1}{\sin(x^2)}$

R: Si ha che vicino a 0 possiamo scrivere $\sin(x) = x + R_1(x)$ e $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$ con $R_n = o(x^n)$ quindi $\frac{\cos(\sin(x)) - 1}{\sin(x^2)} = \frac{\cos(x^2 + R_1(x^2)) - 1}{x^2 + R_1(x^2)} = \frac{1 - \frac{1}{2}(x^2 + R_1(x^2))^2 + R_2(x^2 + R_1(x^2)) - 1}{x^2 + R_1(x^2)} = \frac{1 - \frac{1}{2}(x^2 + (R_1(x))^2 + xR_1(x)) + R_2(x^2 + R_1(x)) - 1}{x^2 + R_1(x^2)}$. Qui adesso bisogna stimare la grandezza dei vari resti e vedere che questi non influiscano nel limite. Dunque, siccome $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$ allora $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_1(x^2)}{x^2} = 0$ e quindi $R_1(x^2) = o(x^2)$. Analogamente si vede che $(R_1(x))^2 = o(x^2)$ e anche $xR_1(x) = o(x^2)$. Il termine $R_2(x + R_1(x))$ è appena più difficile da

analizzare: sappiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$, quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x+R_1(x))}{(x+R_1(x))^2} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x+R_1(x))}{x^2 + (R_1(x))^2 + xR_1(x)} = 0$. Come visto prima $(R_1(x))^2 + xR_1(x)$ e sono
 irrilevanti rispetto a x^2 . Quindi $R(x + R_1(x)) = o(x^2)$. Riassumendo quindi si
 ha che tutti i termini contenenti il resto sono irrilevanti rispetto a x^2 e quindi,
 come sopra il limite è $\frac{-1}{2}$.

FAQ Domanda: Come scelgo quanti termini dello sviluppo di Taylor devo prendere?

Guardando i vari termini che compongono la funzione da studiare, avendo un po di esperienza ci si fa un'idea di quali sono i termini più importanti da confrontare e si cerca uno sviluppo che li contenga: ad es. nell'esercizio 20 si vede che il denominatore è di secondo grado, quindi si cerca di sviluppare il numeratore in modo da avere almeno i termini di secondo grado e un resto di grado superiore (in modo da poterli confrontare con quelli al denominatore).

Nell'esercizio 22 si fa un ragionamento analogo vedendo che siccome vicino a zero si ha $\sin(x) \sim x$ (a meno di un resto di ordine superiore) allora la composizione con il seno non cambierà il grado dei termini principali che dovremo confrontare.

1.1 Integrali

Exercise 23 $\diamond$ Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^2 \max(1, t) dt$$

R: Poiche $\max(1, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq 1 \\ t & \text{se } t > 1 \end{cases}$ l'integrale proposto è uguale a

$$\int_0^1 1 dt + \int_1^2 t dt = \frac{5}{2}.$$

Exercise 24 Si calcoli

$$\int_{-2}^2 \max(1, |x|) dx.$$

R: La risposta è 5 (si tracci il grafico della funzione $y = \max(1, |x|)$).

Example 25 Si calcoli

$$\int_{-2}^2 \min(1, |x|) dx.$$

R: La risposta è 3 (si proceda come sopra).

Exercise 26 $\diamond$ Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^4 \frac{x}{2+x^2} dx$$

R: La funzione da integrare è del tipo $\frac{f'}{f}$, quindi una primitiva è data da $\frac{1}{2} \ln(2+x^2)$ dunque si ha che $\int_2^4 \frac{x}{2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 3$.

Exercise 27 Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{x^2}{1+x} dx$$

R: $\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int \frac{x^2-1}{1+x} + \frac{1}{1+x} dx = -x + \frac{1}{2}x^2 + \ln(1+x)$. Il valore dell'integrale proposto è quindi $\ln 3 + \frac{1}{2} - \ln 2$.

Exercise 28 $\diamond$ Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^3 x [x] dx$$

ove $[x]$ denota la parte intera di x : il più grande intero minore o uguale a x .

R: Restrignendoci intervallo $(1, 3)$ che ci interessa si ha che $x \lfloor x \rfloor = \begin{cases} x * 1 & \text{per } 1 \leq x < 2 \\ x * 2 & \text{per } 2 \leq x < 3 \end{cases}$
 quindi $\int_1^3 x \lfloor x \rfloor dx = \int_1^2 x dx + \int_2^3 2x dx = 6.5$.

Exercise 29 Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^2 x^{\lfloor x \rfloor} dx$$

R: Restrignendoci all intervallo $(0, 2)$ che ci interessa si ha che
 $x^{\lfloor x \rfloor} = \begin{cases} x^0 = 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$ dunque $\int_0^2 x^{\lfloor x \rfloor} dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^2 x dx =$
 $2 + \frac{1}{2}$.

Exercise 30 Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \lfloor \sin x \rfloor dx$$

R: Restrignendoci all intervallo che ci interessa abbiamo che

$$\lfloor \sin x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\} \\ 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{se } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Dunque siccome il valore della funzione nel un punto isolato $x = \frac{\pi}{2}$. Non
 incide nell integrale si ha che $\int_0^{2\pi} \lfloor \sin x \rfloor dx = \int_0^{\pi} 0 dx + \int_{\pi}^{2\pi} -1 dx = -\pi$.

Exercise 31 $\diamond$ Si calcoli il seguente integrale $\int_{-1}^1 x e^{|x|} dx$

Si integra una funzione dispari su un dominio simmetrico rispetto all' origine,
 quindi il risultato è 0.

Exercise 32 Si calcoli il seguente integrale $\int_{-1}^1 \sin |x| dx$

La funzione da integrare è pari quindi l'integrale cercato soddisfa $\int_{-1}^1 \sin |x| dx =$
 $2 \int_0^1 \sin x dx = 2 - 2 \cos 1$.

1.2 Funzioni

Exercise 33 $\diamond$ Si determini l'insieme dei punti ove la seguente funzione non è derivabile

$$f(x) = |x^2(x-1)|$$

R: I punti dove la f potrebbe non essere derivabile sono quelli dove $x^2(x-1) = 0$, cioè 0 e 1. Si ha che $f(x) = \begin{cases} -x^2(x-1) & \text{se } x \leq 1 \\ x^2(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$ per cui in $x = 0$ la funzione è derivabile. Calcolando la derivata a destra e a sinistra del punto $x = 1$ si vede che qui la funzione non è derivabile.

Exercise 34 Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \sin(|x|)$$

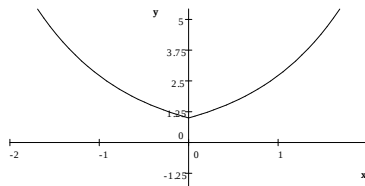
quale delle seguenti proposizioni è vera?

- A- $\square$ — f è discontinua in 0 ma è cont. e deriv. in tutti gli altri punti
- B- $\square$ — f è continua e derivabile in tutti i punti
- C- $\square$ — f è continua in tutti i punti e derivabile in tutti i punti escluso 0
- D- $\square$ — A, B e C sono false

R: La proposizione vera è la C. La funzione è continua in quanto composizione di funzioni continue, si scrive anche come $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \geq 0 \\ \sin(-x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ da cui si vede facilmente che è derivabile in tutti i punti escluso $x = 0$. Infatti se $x < 0$ in un intorno piccolo di x $f(x) = \sin(-x)$ da cui $f(x)' = -\cos(-x)$ in quell intorno. Analogamente se $x > 0$ in un intorno piccolo di x $f(x) = \sin(x)$ da cui $f(x)' = \cos(x)$ in quell intorno. Per $x = 0$ si ha che, per quanto detto prima la derivata destra è 1 e la sinistra è -1. Quindi la funzione non è derivabile in questo punto.²

Exercise 35 $\diamond$ Si determini il punto di minimo della seguente funzione definita sui reali

$$f(x) = e^{|x|}$$



R: Si ha che $e^{|x|} = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

²Ricordiamo che a causa del teorema di Lagrange (il lettore si domandi perchè):

- i) se una funzione è derivabile in $(a, b) - x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = l$ allora $f'(x_0)$ esiste ed è uguale ad l .
- ii) Se i limiti destro e sinistro esistono e sono diversi la funzione non è derivabile.
- iii) se uno dei limiti non esiste la funzione potrebbe anche essere derivabile (vedi $x^2 \sin \frac{1}{x}$). In questo caso bisogna dimostrare la derivabilità o la non derivabilità in un altro modo.

il minimo assoluto è in 0. Infatti per $x < 0$ la funzione è decrescente, mentre per $x > 0$ la funzione è crescente (come si può dimostrare calcolando la derivata).

Exercise 36 Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = x^2 \sin(|x|)$$

quale delle seguenti proposizioni è vera?

- A- ☐ – f è discontinua in 0 ma è cont. e deriv. in tutti gli altri punti
 B- ☐ – f è continua e derivabile in tutti i punti
 C- ☐ – f è continua in tutti i punti e derivabile in tutti i punti escluso 0
 D- ☐ – A, B e C sono false

R: La risposta giusta è la B. Infatti si ha che poiché

$$x^2 \sin(|x|) = \begin{cases} x^2 \sin(-x), & x \leq 0 \\ x^2 \sin(x), & x > 0 \end{cases}$$

la funzione è ovviamente derivabile in tutti i punti diversi da zero, inoltre

$$f' = \begin{cases} -x^2 \cos(-x) + 2x \sin(-x), & x < 0 \\ x^2 \cos(x) + 2x \sin(x), & x > 0 \end{cases}$$

da cui si vede che $f'(0)$ esiste e vale 0.

Exercise 37 Si determini il punto di minimo della seguente funzione definita sui reali

$$f(x) = \sin(x)^2 + x.$$

R: Il minimo cercato non esiste, in quanto per $x \rightarrow -\infty$ la funzione assume valori piccoli quanto si vuole ($\sin(x)$ è limitato, x decresce a $-\infty$).

Exercise 38 $\diamond$ Si determini il valore minimo della seguente funzione definita sui reali

$$f(x) = |x - \cos(x - 1)|^3.$$

R: Si noti che esistono punti dove $x - \cos(x - 1) = 0$. In questi punti anche $f(x) = 0$. Poiché la funzione data assume solo valori positivi si ha che questo è il valore minimo.

Exercise 39 Si determini il valore minimo della seguente funzione definita sui reali

$$f(x) = |\cos^3(x - 1)| + \frac{1}{x}.$$

R: Il minimo richiesto non esiste, in quanto $\frac{1}{x}$ assume valori piccoli quanto si vuole (va a $-\infty$) in un intorno di 0.

Exercise 40 Si consideri

$$f(x) = |\log(x^2 + 1)|$$

quale delle seguenti proposizioni è vera?

- A- ☐ f è discontinua in 0 ma è cont. e deriv. in tutti gli altri punti
- B- ☐ f è continua e derivabile in tutti i punti
- C- ☐ f è continua in tutti i punti e derivabile in tutti i punti escluso 0
- D- ☐ A, B e C sono false

R: Si nota subito che la funzione è definita su tutti i reali. Sicuramente la funzione è continua, in quanto composizione di funzioni continue. La funzione $\log(x^2 + 1)$ inoltre è sempre positiva, quindi $|\log(x^2 + 1)| = \log(x^2 + 1)$. Dunque si ha che la funzione proposta è differenziabile (in quanto composizione di funzioni differenziabili).

Exercise 41 $\diamond$ Sia $C^1[0, 1]$ l'insieme delle funzioni aventi derivata continua in $[0, 1]$, sia X l'insieme definito da

$$X = \left\{ f \in C^1[0, 1] \text{ tali che } \forall n \in \mathbf{N}, f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \right\}$$

- A- ☐ X contiene solo la funzione $f(x) = 0$
- B- ☐ X contiene un numero finito di elementi
- C- ☐ X contiene un numero infinito di elementi
- E- ☐ nessuna delle risposte precedenti

R: L'insieme considerato contiene un numero infinito di elementi. Per dimostrarlo, ad esempio si può cominciare con il cercare una qualsiasi funzione non nulla che appartiene a X . Ad esempio si consideri la funzione $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$. Data una tale funzione anche $Cf(x)$ per ogni C reale appartiene a X . Quindi ce ne sono infinite.

Exercise 42 Sia $C^1[0, 1]$ l'insieme delle funzioni aventi derivata continua in $[0, 1]$, sia X l'insieme definito da

$$X = \{ f \in C^1[0, 1] \text{ tali che } \forall x \in \mathbf{Q} f(x) = 0 \}$$

- A- ☐ X contiene solo la funzione $f(x) = 0$
- B- ☐ X contiene un numero finito (maggiore di 1) di elementi
- C- ☐ X contiene un numero infinito di elementi
- E- ☐ nessuna delle risposte precedenti

R: L'insieme dato contiene solo la funzione $f(0) = 0$. Una dimostrazione rigorosa (che nel test a risposte multiple non è richiesta) si può ottenere nel seguente modo: se X contiene una funzione f che assume un valore diverso da zero in qualche punto y dell'intervallo allora, siccome la funzione è continua si ha che $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y) \neq 0$, dunque, per il teorema di permanenza di segno

dei limiti esiste un piccolo intervallo $(y - \delta, y + \delta)$ dove la funzione è sempre diversa da zero ma in questo intervallo si troverà anche un razionale, quindi uno zero della funzione, questo è assurdo, quindi non esiste una funzione che appartenga ad X e che abbia valori diversi da zero nell'intervallo.

Exercise 43 $\diamond$ Sia $C^1[0, 1]$ l'insieme delle funzioni aventi derivata continua in $[0, 1]$, sia X l'insieme definito da

$$X = \{f \in C^1[0, 1] \text{ tali che } \forall x \in [0, 1] \ f'(x) = 3, \text{ e inoltre } f(0) = 0, f(1) = 0\}$$

- A- ☐ — X non ha elementi
- B- ☐ — X ha un numero finito (maggiore di 0) di elementi
- C- ☐ — X contiene un numero infinito di elementi
- E- ☐ — nessuna delle risposte precedenti

R: X non ha elementi, infatti se una funzione derivabile è tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$ per il teorema di Rolle si ha che esiste un punto x tale che $f'(x) = 0$, contraddicendo l'ipotesi che $\forall x \in [0, 1] \ f'(x) = 3$.

Exercise 44 Si determini il valore minimo della seguente funzione

$$f(x) = \sin(\pi \sin(x)).$$

R: Al variare di x nei reali si ha che $\sin(x)$ assume tutti i valori compresi tra -1 e 1 , dunque assume anche il valore $\frac{-1}{2}$. Quindi si ha che $\min(f(x)) \leq \sin(\pi * \frac{-1}{2}) = -1$. Ma d'altro canto è ovvio che $\min(f(x)) \geq -1$, quindi il minimo cercato è -1 .³

Exercise 45 Si consideri la seguente successione: $\begin{cases} a_0 = 0.1 \\ a_n = e^{(a_{n-1})} \end{cases}$ che si ottiene premendo ripetutamente il tasto e^x sulla calcolatrice. Si calcoli, se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

R: Il limite è infinito, infatti $e^x \geq x + 1$, quindi applicando e^x ad un qualsiasi dato iniziale si ottiene un risultato che è maggiore di quanto non si faccia incrementandolo di 1. Se si fa questa cosa ripetutamente si andrà ad infinito.

Exercise 46 Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

quale delle seguenti proposizioni è vera?

- A- ☐ f è continua nei punti ove $\sin x = \cos x$ ma non è continua negli altri punti
- B- ☐ f è discontinua in tutti i punti
- C- ☐ f è continua in tutti i punti e derivabile in tutti i punti di coordinata razionale
- D- ☐ A, B e C sono false

³Facciamo notare che lo stesso ragionamento si può applicare a molti casi simili. Per es. $f(x) = \sin(\max(x, 0))$, $f(x) = \cos(\log|x|) \dots$

R: La risposta giusta è A.

Exercise 47 Si consideri $\alpha \in \mathbb{R}$ e la seguente famiglia di funzioni:

$$f_\alpha(x) = |e^{-x^2} + \alpha|$$

quale delle seguenti proposizioni è vera?

A- ☐ f_α è continua in tutti i punti ma non è ovunque derivabile quando $-1 < \alpha < 0$.

B- ☐ f_α è continua in tutti i punti solo quando $\alpha \geq 0$

C- ☐ f_α è continua in tutti i punti e derivabile per tutti gli $x \neq \alpha$

D- ☐ A, B e C sono false

R: La risposta giusta è A

Exercise 48 Quanti sono gli elementi dell'insieme $X = \{f \in C^2[0, 1] \text{ tali che } \forall x \in [0, 1] \ f''(x) = 0 ; f(0) = 3, f(1) = 2\}$

R: poiché la derivata seconda di queste funzioni si annulla, i grafici di queste funzioni sono rette, e dati due punti, per questi ne passa una e una sola, quindi la risposta giusta è 1.

Exercise 49 Quanti sono gli elementi dell'insieme $X = \{f \in C^2[0, 1] \text{ tali che } \forall x \in [0, 1] \ f'(x) = 0 ; f(0) = 3, f(1) = 4\}$

R: l'insieme è vuoto! (perché?)

Exercise 50 Quanti sono gli elementi dell'insieme $X = \{f \in C^2[0, 1] \text{ tali che } \forall x \in [0, 1] \ |f''(x)| = 1 ; f(0) = 0, f(1) = 0\}$

R: L'insieme contiene 2 funzioni (i cui grafici sono due parabole passanti per i punti dati e aventi derivata seconda rispettivamente +1 e -1).

Exercise 51 Quanti sono gli elementi dell'insieme $X = \{f \in C^3[0, 1] \text{ tali che } \forall x \in [0, 1] \ f'''(x) = 0 ; f(0) = 0, f(1) = 0\}$

R: L'insieme contiene infiniti elementi: tutti i polinomi di secondo grado ($f''' = 0$), che passano per i punti dati.

Exercise 52 Sia $\beta > 0$ per quali α l'equazione $|x^2 - \alpha| = \beta$ ha esattamente 3 soluzioni?

R: la soluzione è $\alpha = \beta$ (si tracci il grafico di $y = |x^2 - \alpha|$ e lo si intersechi con $y = \beta$).

Exercise 53 Sia $\beta > 0$ per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione $|\alpha x^2| = \beta$ ha esattamente 3 soluzioni reali?

R: Nessuno (si tracci come sopra il grafico delle funzioni interessate).

Exercise 54 Si consideri la seguente successione: $\begin{cases} a_0 = 0.1 \\ a_n = \sin(a_{n-1}) \end{cases}$ che si ottiene premendo ripetutamente il tasto sin sulla calcolatrice. Si calcoli, se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

R: Si ha $\sin(x) < x$ per tutti gli $x > 0$, quindi un dato iniziale positivo produce una successione decrescente che va verso 0, che è un punto fisso ($\sin(0) = 0$), quindi il limite è 0

Exercise 55 Si consideri la seguente successione: $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_n = (a_{n-1})^{a_{n-1}} \end{cases}$ si calcoli, se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

R: si ha che $a_0 = -1$, $a_1 = (-1)^{-1} = -1$, quindi la successione ha sempre valore -1 e quindi il limite è -1 .

Exercise 56 Si consideri la seguente successione: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases}$ si calcoli, se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

R: Si intuisce facilmente che la successione cercata tende a 0. Lasciamo la dimostrazione, non banale, al lettore.

1.3 Algebra Lineare

Exercise 57 $\diamond$ Calcolare gli autovalori della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

R: Il polinomio caratteristico è $(5-x)(6-x)(-(1-x)x-6)$. 5, 6 Sono evidentemente autovalori. Gli altri autovalori sono 3, -2.

Exercise 58 $\diamond$ Calcolare il rango della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

R: La matrice proposta è triangolare. Il suo determinante è diverso da zero, quindi il rango è 4.

Exercise 59 $\diamond$ Calcolare il rango della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

R: Si vede che una riga della matrice è nulla. La terza e quarta riga sono multiple, quindi le righe della matrice si ottengono tutte come combinazione lineare della prima e dell'ultima. Queste due inoltre sono indipendenti fra loro. Quindi il rango è 2.

Exercise 60 $\diamond$ Calcolare il rango della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

R: Si vede subito che le prime tre colonne della matrice sono indipendenti e che la quarta è indipendente dalle prime due. Se la quarta fosse dipendente dalle prime tre (e il rango sarebbe tre) si avrebbe che le prime due colonne non potrebbero entrare nella combinazione lineare (perché la quarta colonna comincia con due zeri). Quindi si avrebbe che la quarta colonna sarebbe multipla della terza. Ciò non è possibile, come si vede facilmente. Quindi il rango è quattro (alla stessa conclusione si arriva calcolando il determinante della matrice).

Exercise 61 Calcolare il rango della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R: Si vede facilmente che il rango della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ è 3. Le

altre due colonne sono multiple della quarta, quindi non aumenteranno il rango. Dunque il rango cercato è 3.

Exercise 62 Calcolare il rango della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

R: Si vede subito che i secondi due vettori colonna sono indipendenti da primi due. Calcolando i determinanti delle sottomatrici $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ si ha che la prima ha rango 1 e la seconda ha rango 2. Il rango della matrice data dunque è 3.

Exercise 63 Si calcoli l'equazione del piano in $\mathbf{R}^3$ perpendicolare alla retta data dalla equazione parametrica

$$r(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 23 \\ 45 \\ 19 \end{pmatrix} \text{ e passante per il punto } \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

R: Visto che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ che designa la direzione della retta è anche

il vettore normale al piano si ha che l'equazione del piano sarà $2x + 5y + 7z = \text{QUALCOSA}$. Il numero *QUALCOSA* si calcola verificando che il piano passi

per $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$. Cioè si sostituiscono le coordinate di tale punto nella equazione e si

trova il *QUALCOSA* che verifica l'equazione. Quindi si ha $2 \cdot 7 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = \text{QUALCOSA}$, cioè $\text{QUALCOSA} = 98$. Dunque una equazione del piano cercato è $2x + 5y + 7z = 98$, ma anche $4x + 10y + 14z = 196$ è una equazione per tale piano.

Exercise 64 Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^1 \det \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} dx$$

R: Si ha che $\det \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2x$, dunque

$$\int_0^1 \det \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} dx = \int_0^1 2x dx = 1.$$

Exercise 65 Si consideri la seguente equazione nel campo complesso:

$$e^{2nz} + 4e^{nz} + 3 = 0$$

si scrivano esplicitamente tutte le soluzioni e si rappresentino sul piano di Gauss.

R: Posto $w = e^z$ si ottiene l'equazione $w^2 + 4w + 3 = 0$, le cui soluzioni sono: $\{w = -1\}, \{w = -3\}$. Pertanto si devono risolvere le equazioni

$$e^z = -1 \text{ e } e^z = -3$$

le soluzioni di quest'ultime equazioni sono $\{z = i\pi + 2k\pi i\}$ e $\{z = \ln(3) + i\pi + 2k\pi i\}$.

2 Esercizi Piu' Sostanziosi

Qui mettiamo esercizi la cui soluzione richiede vari passaggi. Questi esercizi sono adatti per una prova scritta. Ricordiamo che nella valutazione di uno scritto, completezza, chiarezza e rigore dell'esposizione giocano un ruolo molto importante. Ricordiamo inoltre che è sempre meglio impiegare il proprio tempo a rispondere in maniera completa, anche a poche domande, fra quelle che vengono poste, piuttosto che perdere tempo a "scrivere qualcosa" (tanto per provare a raccattare qualche punto) come risposta a tutte le domande poste. Questo è un errore tipico degli studenti poco preparati che viene notato subito da chi corregge il compito.

2.1 Funzioni

Exercise 66 $\diamond$ Si studi la seguente funzione definita in $\mathbf{R}$:

$$f(x) = \max(x^3 e^{-x}, -x^5);$$

1-Si determini il dominio D di definizione di f e se f è continua in ogni punto.

R: f è definita su tutto $\mathbf{R}$. Poichè il max di funzioni continue è continuo e $x^3 e^{-x}$ e $-x^5$ sono continue, anche f lo è.

2- Si determini se la funzione è derivabile in ogni punto di D e determinare la sua derivata ove definita.

R: Poichè

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-x} & \text{per } x > 0 \\ -x^5 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} (3x^2 - x^3) e^{-x} & \text{per } x > 0 \\ -5x^4 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

La funzione quindi è derivabile in tutti i punti diversi da 0. Dato che i limiti della derivata a destra e a sinistra di 0 coincidono (si veda la nota 2!)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-5x^4) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 - x^3) e^{-x} = 0$$

si ha che la funzione è derivabile anche in 0 e $f'(0) = 0$.

3-Determinare tutti i punti di max e min locali della f

R: La funzione è derivabile, quindi nei punti stazionari locali la derivata si annullerà. La derivata si annulla nei punti $x = 0$ ed $x = 3$. Poichè $f(x) \geq 0$, $x = 0$ è un punto di minimo assoluto e quindi anche locale. $x = 3$ è un punto di massimo locale perchè la derivata cambia di segno diventando negativa.

4-Determinare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluto della funzione.

R: Il massimo non esiste in quanto la funzione non è limitata superiormente. Il minimo è 0 e si raggiunge in $x = 0$.

5- Determinare l'estremo superiore ed inferiore di f .

R: Siccome $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ allora $\sup f = +\infty$, dal fatto che $\forall x, f(x) \geq 0$ e $f(0) = 0$ si ha che $\inf f = \min f = 0$.

6- *Determinare se la f ha dei punti di flesso e giustificare la risposta.*

R: Certamente f non ha punti di flesso per $x \leq 0$. Per $x > 0$,

$$f''(x) = x(6 - 6x + x^2)e^{-x}$$

L'equazione

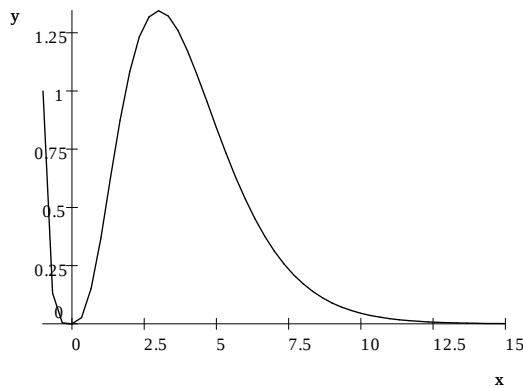
$$x^2 - 6x + 6 = 0$$

ha due soluzioni positive ed esse corrispondono a punti di flesso (in quanto la derivata seconda cambia di segno).

7- *Determinare, se esiste, $f''(0)$.*

R: Per $x > 0$ si ha che $f''(x) = x(6 - 6x + x^2)e^{-x}$ e quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = 0$. Per $x < 0$ invece $f''(x) = 20x^3$ quindi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = 0$. Si conclude che f'' esiste ed è uguale a 0.

8- *Tracciare un grafico che mostri l'andamento qualitativo della funzione*



9- *Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$. (giustificando la risposta).*

R: Le soluzioni sono tre: una si trova banalmente nell'intervallo $x \leq 0$, poichè la funzione $g(x) = -x^5$ è biunivoca da $\mathbf{R}^-$ a $\mathbf{R}^+$. Un'altra soluzione (e una sola) si trova nell'intervallo $(0, 3)$. In questo intervallo la funzione è continua, crescente (derivata positiva) e quindi biunivoca dall'intervallo $(0, 3)$ all'intervallo $(0, f(3))$, ma $f(3) = 9e^{-3} > 1$ quindi il valore 1 sarà assunto una e una sola volta. Analogamente si ragiona per dimostrare che vi è una terza soluzione nell'intervallo $(3, \infty)$.

10- *Determinare se $f(x)$ ristretta all'intervallo $(-\infty, 0)$ è convessa.*

R: Calcolando la derivata seconda di $g(x) = -x^5$ si trova che questa è positiva nell'intervallo considerato, quindi la funzione è convessa.

Exercise 67 *Fissato un numero reale $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f_\alpha(x) = |\sin x + \alpha|$*

1- *Per quali α la funzione $f_\alpha(x)$ è continua?*

R: f_α è sempre continua un quanto composizione di funzioni continue (il valore assoluto e $\sin x + \alpha$).

2- Per quali α la funzione $f_\alpha(x)$ è derivabile ovunque?

R: f_α è derivabile in tutti i punti dove $\sin x + \alpha \neq 0$ in quanto composizione di funzioni derivabili nei punti dove vengono calcolate. Bisogna verificare il comportamento nei punti dove $\sin x + \alpha = 0$.

Se $\alpha \geq 1$ $\sin x + \alpha \geq 0$ e quindi $|\sin x + \alpha| = \sin x + \alpha$ e quindi f_α è derivabile ovunque.

Se $\alpha < 1$ si può verificare facilmente calcolando le derivate destre e sinistre che esistono punti spigolosi per gli x dove $f_\alpha(x) = 0$. Dunque la risposta è $\alpha \geq 1$.

3- Per quali α la funzione $g_\alpha(x) = \sqrt{|\sin x + \alpha|}$ è derivabile ovunque?

R: Per quanto detto prima anche $g_\alpha(x)$ è derivabile in tutti i punti dove $g_\alpha(x) \neq 0$, quindi se $\alpha > 1$ g_α è derivabile in tutti i punti.

Poiché per ogni funzione $h(x)$, $\frac{d}{dx} \sqrt{h(x)} = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$ allora $\sqrt{h(x)}$ non sarà mai derivabile nei punti dove $h(x) = 0$ e $h'(x) \neq 0$. Questo vale anche per le derivate destre e sinistre e quindi vale anche se $h(x) = f_\alpha(x)$ (che è una funzione avente derivate destre e sinistre in tutti i punti). Dunque se $\alpha < 1$, g_α non è derivabile nei punti dove $g_\alpha = 0$.

Rimane da analizzare il caso $\alpha = 1$ anche in questo caso la funzione g_α non è derivabile nei punti dove $g_\alpha = 0$. Siccome in questo caso $\sin x + 1 \geq 0$ allora si ha $g_1(x) = \sqrt{\sin x + 1}$, allora $g'_1(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x + 1}}$ si verifica facilmente che nei punti dove $\cos x = 0$ la derivata destra e sinistra non coincidono.

Exercise 68 $\diamond$ Si consideri una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$, tale che esiste un punto x_0 dove $f(x_0) = 0$ e $f'(x_0) = c \neq 0$.

0) Si dimostri che se $f'(x_0) > 0$ allora esiste un intervallo $[a, b]$, intorno di x_0 dove $f(x) < 0 \forall x \in (a, x_0)$, $f(x) > 0 \forall x \in (x_0, b)$.

R: Questo discende direttamente dalla definizione di derivata e dal teorema di permanenza del segno nei limiti (completare!).

1) La funzione g data da $g(x) = |f(x)|$ è derivabile in x_0 ? (giustificare la risposta).

R: La funzione non è derivabile in x_0 . Supponiamo che si abbia $f'(x_0) > 0$ (un ragionamento analogo si fa nel caso in cui $f'(x_0) < 0$).

Si ha allora che esiste un intorno come nel punto 0. Questo vuol dire che in questo intorno $g(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } x \in (a, x_0) \\ f(x) & \text{se } x \in (x_0, b) \end{cases}$, dunque si ha che $f'(x_0) = g'_+(x_0) = -g'_-(x_0)$ (ove $g'_+(x_0)$ e $g'_-(x_0)$ sono le derivate destre e sinistre di g in x_0). Se $f'(x_0) \neq 0$ quindi g non è derivabile in x_0 .

2) Cosa succede se invece $f'(x_0) = 0$? (anche qui giustificando al risposta)

R: la funzione g è derivabile. Si veda il punto precedente.

3) Si dimostri che se una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ è tale che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $|f + \alpha| \in C^1(\mathbb{R})$ allora f è una funzione costante. (Suggerimento: si usi il punto 1).

R: Se ci fosse una funzione che soddisfa le ipotesi sopra ma questa funzione non fosse costante allora ci sarebbe almeno un punto dove la derivata è diversa

da zero (conseguenza del teorema di Lagrange). Chiamiamo questo punto x_0 . Consideriamo allora la funzione $h(x) = f(x) - f(x_0)$. Questa funzione soddisfa le ipotesi al punto 1 e quindi il suo valore assoluto non sarà derivabile, e quindi...

4) *Un enunciato come al punto 3 vale per le funzioni di più variabili?*
Provateci!

Exercise 69 Si consideri la funzione sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = \min(\sin(|x|), \cos(x))$.

1) *La funzione data ha qualche simmetria?*

R: Sì, si vede che $f(x) = f(-x)$.

2) *In quali punti di $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ è continua?*

R: In tutti i punti, visto che sappiamo che $\min$ di funzioni continue è continuo e $\sin|x|$ e $\cos(x)$ sono continue.

3) *In quali punti di $[-\pi, \pi]$ è derivabile?*

R: Si vede che $f(x) = \begin{cases} \sin(|x|) & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ \cos(x) & \text{se } x \notin [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$

Calcolando le derivate destre e sinistre nei punti $0, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ si vede che qui la funzione non è derivabile. Se x invece è un punto diverso da $0, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ allora in un intorno di x si ha che f è identicamente uguale o a $\cos(x)$ oppure a $\sin(x)$ o a $\sin(-x)$ e quindi è derivabile quante volte si vuole.

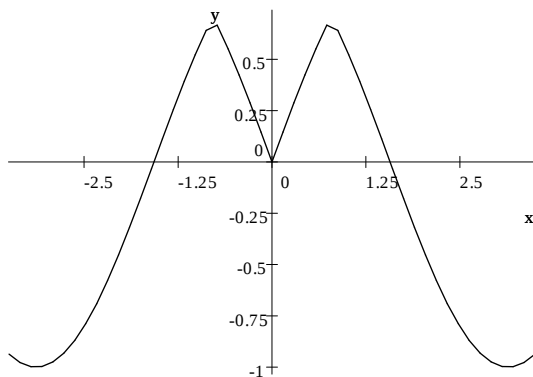
4) *In quali punti ammette derivata seconda?*

R: Siccome f non è derivabile in $0, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ allora non vi esisterà nemmeno la derivata seconda. Da quanto detto sopra invece la derivata seconda esisterà in tutti gli altri punti.

5) *Trovare sup, inf, e qualora esistessero massimo e minimo della funzione data.*

R: Siccome la funzione è continua e definita su un intervallo chiuso si ha che $\sup$ e $\inf$ coincidono con $\max$ e $\min$. Poiché fra 0 e $\frac{\pi}{4}$ la funzione è crescente (come si vede dalla derivata) e fra $\frac{\pi}{4}$ e π la funzione è decrescente si ha in $\frac{\pi}{4}$ c'è un massimo locale (notare che qui la derivata non è definita). Analogamente si ha per $-\frac{\pi}{4}$. Non ci sono altri massimi locali. In questi punti la funzione vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il minimo invece è -1 , in π e $-\pi$.

6) *Tracciare il grafico di f*



Exercise 70 Si consideri la funzione

$$f(x) = \max [xe^{2x+1}, x]$$

- 1-determinare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

R: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

- 2-determinare se la funzione è continua e giustificare la risposta

R: SI perché è composizione di funzioni continue ($\max(x, y)$ è una funzione continua di 2 variabili).

- 3-determinare $\sup f$ e $\inf f$ e dire se coincidono con $\max f$ e $\min f$

R: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ quindi $\sup f = +\infty$. il massimo non esiste. Dallo studio degli intervalli di crescita-decrescenza della funzione si ha che $\min f = \inf f = -\frac{1}{2}$;

- 4-dire se la f ha almeno un punto di flesso

R: Dallo studio qualitativo della funzione si intuisce che un flesso potrebbe trovarsi nella regione $x < 0$. Per dimostrarlo calcoliamo la derivata seconda: $f'(x) = D_x (xe^{2x+1}) = e^{2x+1} (1 + 2x)$; $f''(x) = D_x [e^{2x+1} (1 + 2x)] = 4e^{2x+1} [x + 1]$; $4e^{2x+1} [x + 1] = 0$ se e solo se $x = -1$.

- 5-determinare gli eventuali asintoti della f

R: visto che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ esiste un asintoto orizzontale sinistro dato da $y = 0$. Non ci sono altri asintoti (perché?).

- 6-determinare se f ristretta all'intervallo $[3, +\infty)$ è iniettiva

R: sì, in quanto $f'(x) = e^{2x+1} (1 + 2x)$ ristretta a $[3, +\infty)$ è positiva.

- 7-determinare

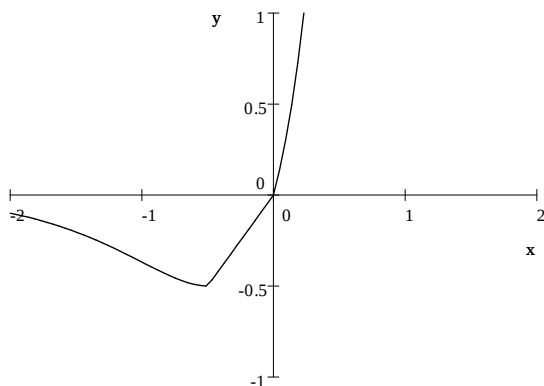
$$\max_{x \in [-4, 4]} f(x).$$

R: il massimo è un estremo dell'intervallo dunque è dato da $\max \{f(-4), f(4)\} = f(4) = 4e^9$;

- 8-determinare se esiste la derivata della f nel punto $x = -\frac{1}{2}$ giustificare la risposta.

R: No perché la derivata sinistra è diversa da quella destra.

- 9-Tracciare il grafico della funzione



R:

Exercise 71 Si consideri la funzione $f(x) = |x| + e^x$

1) Si determinino il campo di esistenza e le proprietà di regolarità della funzione

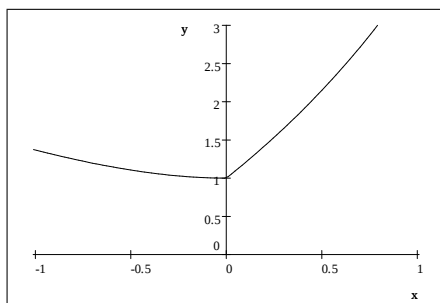
R: la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. È continua su tutto $\mathbb{R}$ (somma di funzioni continue) e derivabile infinite volte in tutto $\mathbb{R} - \{0\}$ (dove lo sono $|x|$ e e^x). Per $x = 0$ come si vede facilmente, calcolando le derivate destre e sinistre la funzione non è derivabile.

2) Si determinino il sup, l'inf dei valori assunti e si dica se questi sono massimi o minimi

R: Facilmente si vede che il sup è ∞ , $\inf(f) = \min(f) = 1$

3) Si determinino gli intervalli di concavità/convessità della funzione data e se ne tracci il grafico

R: Calcolando la derivata seconda si vede che $f''(x) = e^x$, se $x \neq 0$ quindi la funzione è convessa.



4) Se $g(x) = x + 10$, quante soluzioni ha l'equazione $f = g$?, Perché?

R: Si hanno 2 soluzioni si suddivide il problema in due parti, considerando prima i reali positivi e poi quelli negativi e si proceda come al solito...

Exercise 72 $\diamond$ Si studi la seguente funzione definita in $\mathbb{R}^+$, se ne tracci il grafico seguendo le domande proposte:

$$f(x) = e^x - \int_1^x \frac{e^t}{t} dt;$$

1 - Si determini la derivata di $f(x)$.

R: Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $f'(x) = e^x \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

2 - Si determini l'insieme di tutti i punti critici di f

R: $f'(x) = 0 \iff e^x \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \iff x = 1$; solo $x = 1$

3 - Si calcoli la derivata seconda di f e si studi la convessità.

R: $f'(x) = e^x \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^x \frac{1}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} (x^2 - x + 1)$; $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ convessa in tutto $\mathbf{R}^+$

4 - Si determinino gli eventuali punti di max e min ed i relativi valori.

R: $x = 1$ è un punto di minimo in quanto $f''(x) > 0$. $f(1) = e^1 - \int_1^1 \frac{e^t}{t} dt = e$.

Il massimo ovviamente non esiste.

5 - Si determinino gli eventuali zeri di f .

R: Poichè f è sempre positiva (il minimo è positivo) non ha zeri.

6 - Si calcolino i seguenti limiti a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

a) Utilizzando il criterio del confronto si ottiene la soluzione, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \geq$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x - \int_1^x \frac{1}{t} dt \right) \geq \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \log x) = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e$ in quanto f è continua in 1.

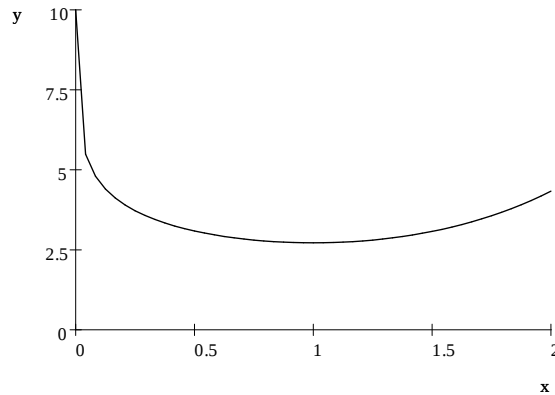
c) Per calcolare il terzo limite si devono confrontare gli infiniti e^x ed $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

Per fare ciò si usa l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\int_1^x \frac{e^t}{t} dt} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\frac{e^x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

dunque e^x cresce più di $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ e pertanto $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

7-Grafico di f



Exercise 73 (più difficile) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

1—Si dimostri che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ può essere estesa con continuità nel punto $x = 0$ (e quindi f è definita su tutti i reali).

R. Basta che esista il limite per $x \rightarrow 0$; si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

• 2—determinare se la funzione $f(x)$ è continua e giustificare la risposta

R: SI. $\frac{\sin t}{t}$ è continua (qualora la si identifichi con la sua estensione continua) e dunque la sua primitiva è derivabile e quindi continua. Inoltre anche $\frac{x}{\sqrt{2}}$ è continua e la differenza di funzioni continue è una funzione continua.

3—Calcolare la derivata della $f(x)$ e dimostrare che si annulla in due punti.

R. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sin x}{x}$; si tratta ora di vedere quante soluzioni ha l'equazione

$$\frac{\pi \sin x}{4x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ovvero $\frac{\sin x}{x} = \frac{4}{\pi\sqrt{2}}$.

Poiché la situazione è simmetrica rispetto all'asse y ci possiamo restringere a studiare il caso $x > 0$.

Si ha che $\frac{4}{\pi\sqrt{2}} < 1$ inoltre $\frac{\sin x}{x}$ è continua e vicino allo 0 e assume valori prossimi ad 1. Quando x cresce invece $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$. Per il teorema dei valori intermedi allora esiste almeno una soluzione. Tale soluzione è unica in quanto $D(\frac{\sin x}{x}) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, $x \cos x - \sin x < 0 \Leftrightarrow x \cos x < \sin x \Leftrightarrow x < \tan x$ che è verificata fino a $\frac{\pi}{2}$ dunque $\frac{\sin x}{x}$ decresce almeno fino al punto $x = \frac{\pi}{2}$ dove vale $\frac{2}{\pi}$, il quale è minore di $\frac{4}{\pi\sqrt{2}}$ e quindi in fino a $\frac{2}{\pi}$ c'è una e una sola soluzione perché la funzione è monotona.

Da $\frac{\pi}{2}$ in poi non ci saranno soluzioni, in quanto se ci fossero si avrebbe $\sin x \geq \frac{4}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} > 1$ (l'ultimo passaggio si può anche fare notando che $\frac{\pi \sin x}{4x} \leq \frac{\pi}{4x} \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$). Siccome la situazione è simmetrica l'unica soluzione trovata sugli x positivi darà luogo ad un'altra soluzione per gli x negativi (si può vedere che le soluzioni sono $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = -\frac{\pi}{4}$).

• 4—Determinare i punti di massimo o minimo locale della f

R. $x = -\frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo locale in quanto $f'(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ (questo discende da $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 < 0$ e $f'' > 0$ come visto sopra) ed è > 0 per $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$; analogamente si vede che $x = -\frac{\pi}{4}$ è un punto di massimo locale

• 5—Calcolare (se esiste)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

R. Per le x grandi la derivata è ben positiva; per esempio per $x > 10$, $f'(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{10} > \frac{1}{2}$. Dunque $\int_0^x f'(x) dx > \int_0^x \frac{1}{2} dx$ quindi, integrando

$f(x) - f(0) > \frac{1}{2}x$ quindi la funzione cresce più di $\frac{1}{2}x$ e quindi il limite cercato è $+\infty$.

6–Determinare se f ristretta all'intervallo $[10, +\infty)$ è iniettiva

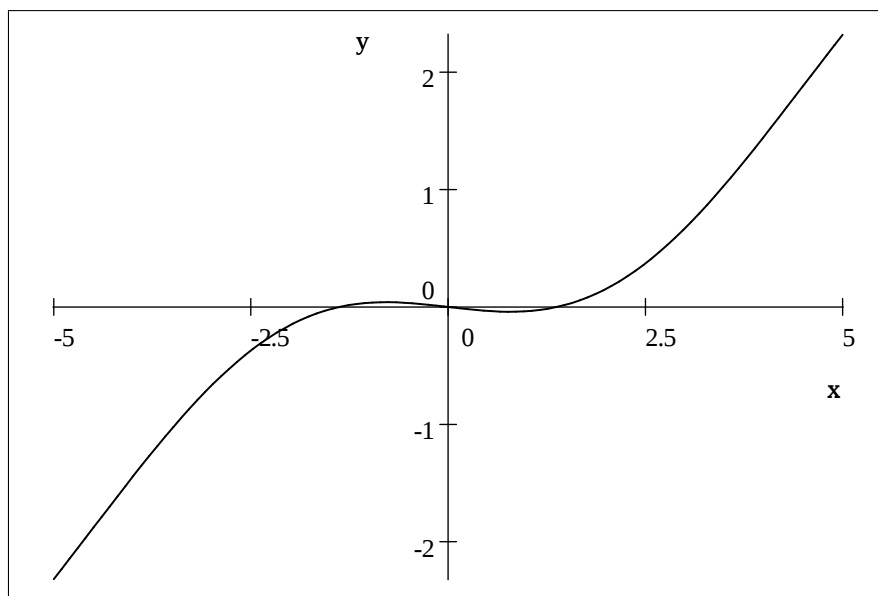
R: sì, in quanto $f'(x)$ ristretta a $[10, +\infty)$ è positiva.

• 7–Determinare

$$\max_{x \in [0, 1/10]} f(x)$$

R: poichè la funzione è decrescente in $[0, 1/10]$ il massimo è raggiunto nello 0 e vale 0.

• 8–Tracciare il grafico della funzione



Exercise 74 Sia $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

• 1–Calcolare i Limiti alla frontiera del dominio.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\log x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}} = 1$$

• 2–determinare $\sup f$ e $\inf f$ e dire se coincidono con $\max f$ e $\min f$

R: Il massimo è raggiunto ove si annulla la derivata prima $f'(x) = -x^{\frac{1-2x}{x}} (\ln x - 1)$ ovvero per $x = e$, quindi $\sup f = \max f = e^{\frac{1}{e}}$. Il minimo non esiste perché in zero la funzione non è definita, mentre $\inf f = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

- 3-dire se la f ha almeno un punto di flesso

R: Poiché la f è convessa in un intorno destro di 0 (in quanto la derivata prima è crescente) e concava in un intorno di e (dove si ha il massimo) esiste almeno un punto di flesso tra 0 ed e . Infatti la derivata seconda è continua, quindi per il teorema dei valori intermedi.....(il lettore completi il ragionamento)

- 4-determinare gli eventuali asintoti della f

R: L'unico asintoto è dato dalla retta $y = 1$

- 5- determinare se f ristretta all'intervallo $[3, +\infty]$ è iniettiva

R: La risposta è positiva in quanto in tale intervallo la derivata è sempre negativa.

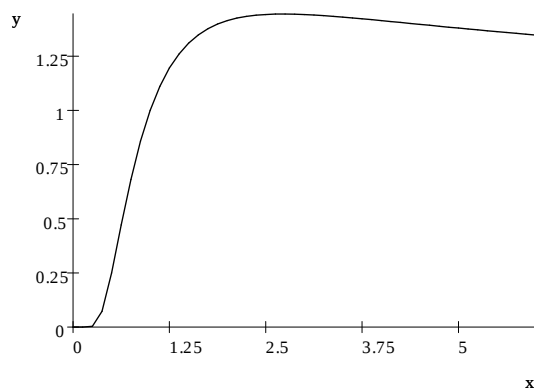
- 6-determinare $\min_{x \in [1, 4]} f(x)$

R: Il minimo di f è raggiunto nel punto $x = 1$ e vale 1.

- 7-determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{6}{5}$

R: Da quanto capito della funzione fino ad adesso (la funz è continua, ha un solo massimo ecc..) risulta che le soluzioni sono 2.

- 8-Tracciare il grafico della funzione.



Exercise 75 75 Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = \max \left(\frac{1}{1+x^2}, 3-x^2 \right)$$

1-determinare gli eventuali punti ove f non è derivabile.

R: Visto che $\frac{1}{1+x^2}$ e $3-x^2$ sono C^∞ gli unici punti candidati a non essere derivabili sono dati da $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$, in cui si "passa da una funzione all'altra" calcolando le derivate destre e sinistre in questi punti si vede che qui $f(x)$ non è derivabile.

2-determinare $\sup f$ e $\inf f$ e dire se coincidono con $\max f$ e $\min f$

R: Studiando gli intervalli di crescita-decrescenza di $f(x)$, e il limite a ∞ si vede che $\sup f = \max f = 3$ e $\inf f = 0$ inoltre $\min f$ non esiste

3-dire se la f ha almeno un punto di flesso.

R: Calcolando la derivata seconda negli intervalli dove questa è definita si vede che non ci sono flessi.

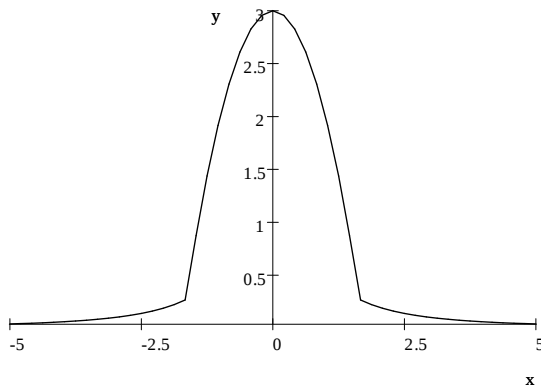
4- determinare se f ristretta all'intervallo $[1, +\infty)$ è iniettiva

R: Sì, perché in questo intervallo la funzione è monotona, essendo la derivata negativa.

5- determinare $\max_{x \in [1,4]} f(x)$

R: Visto che in quell'intervallo la funzione è decrescente il massimo è in uno degli estremi, quindi $\max_{x \in [1,4]} f(x) = f(1) = 2$

6-Tracciare il grafico della funzione



Exercise 76 Si studi la seguente funzione tracciandone il grafico:

$$f(x) = \sqrt{\left| \frac{x}{1+x} \right|}$$

1 - Si determini l'insieme S dei punti singolari di f e si classifichi ciascun punto singolare.

R: $S = \{0, -1\}$; 0 è un punto di cuspidè (in quanto $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \pm\infty$) e -1 è una singolarità di II specie avendo un asintoto verticale.

2 - Si determini l'insieme di tutti i punti critici di f

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\left| \frac{x}{1+x} \right|} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\left| \frac{x}{x+1} \right|}}{x(x+1)}$$

$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\left| \frac{x}{x+1} \right|}}{x(x+1)} = 0$ se $\frac{x}{x+1} = 0$, ma $x = 0$ è un punto singolare è quindi non si hanno punti critici.

3 - Si determinino i punti max e di min locali e assoluti di f (qualora esistano) ed il corrispondente valore della f .

R: Punti di massimo locale non esistono; $x = 0$ è il minimo assoluto

4 - Si determini il massimo ed il minimo della f ristretta all'intervallo $[\frac{3}{2}, 2]$;

R: In tale intervallo non ci sono punti critici e la funzione è crescente; dunque $\min = f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{5}\sqrt{15}$; $\max = f(2) = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

5 - Si determinino gli eventuali asintoti di f

$y = 1$ è un asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\left| \frac{x}{1+x} \right|} = 1$$

e la retta $x = -1$ è un asintoto verticale

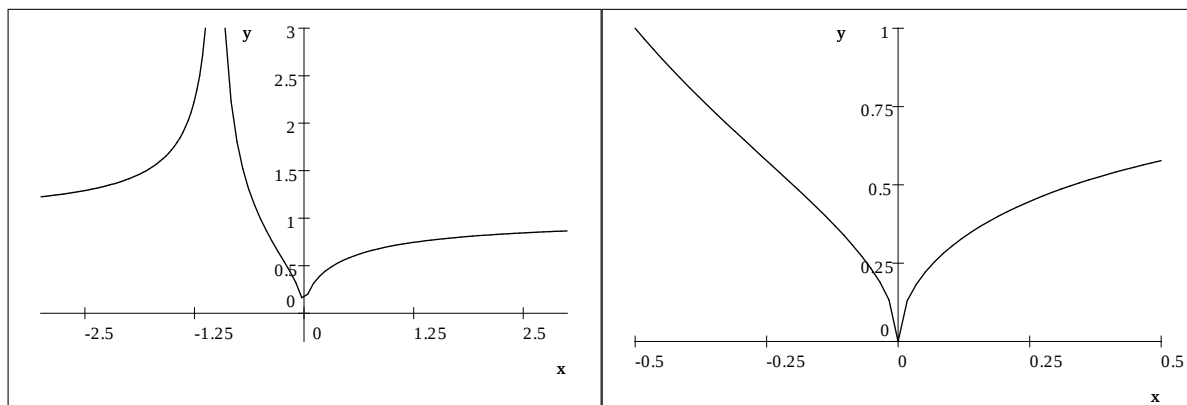
6 - Si determinino gli intervalli massimali nei quali f è concava o convessa.

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\left| \frac{x}{x+1} \right|}}{x(x+1)} = -\frac{1}{4} (4x+1) \frac{\sqrt{\left| \frac{x}{x+1} \right|}}{(x+1)^2 x^2}$$

I punti singolari o critici per f'' sono $x = 0, -1, -1/4$; pertanto f'' può cambiare segno solo in questi punti, il segno di f'' mostra che

- in $(-\infty, -1)$ f è convessa
- in $(-1, -\frac{1}{4}]$ f è convessa
- in $[-\frac{1}{4}, 0]$ f è concava
- in $[0, +\infty)$ f è concava

7- Grafico di f



Exercise 77 $\diamond$ Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{|1-x^2|}$$

1-determinare i punti di massimo e minimo locale;

R: La funzione è derivabile in tutti i punti dove è definita, $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^{-2x}}{|1-x^2|} \right) = -2e^{-2x} \frac{-1+x^2+x}{|1-x^2|(-1+x^2)}$.

Dunque i punti critici si hanno quando $-1+x^2+x=0$, ovvero per $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ e sono punti di minimo locale

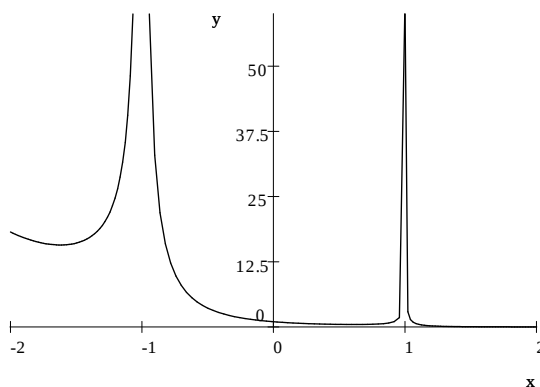
2-determinare $\sup f$ e $\inf f$ e dire se coincidono con $\max f$ e $\min f$;

R: Dal fatto che si ha un asintoto verticale per $x=1$ si ha che $\sup f = +\infty$; poichè $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\inf f = 0$. Il massimo ed il minimo non esistono.

3-determinare se f ristretta all'intervallo $(1, +\infty)$ è iniettiva

R: Sì in quanto la funzione è monotona decrescente avendo la derivata negativa.

4-Tracciare il grafico della funzione



Exercise 78 Si studi la seguente funzione tracciandone il grafico:

$$f(x) = \cos \left(\frac{\pi x^2}{1-x^2} \right)$$

2 - Si determini l'insieme S dei punti singolari di f e si classifichi ciascun punto singolare.

R: $S = \{1, -1\}$; sono discontinuità di II specie

3 - Si determini l'insieme di tutti i punti critici di f

R: $f'(x) = \frac{2\pi x}{1-2x^2+x^4} \left(\sin \frac{\pi x^2}{-1+x^2} \right)$, si ha che $\sin \left(\pi \frac{x^2}{x^2-1} \right) = 0$ se e solo se $\frac{\pi x^2}{x^2-1} = k\pi$, e quindi si hanno le seguenti soluzioni:

se $k \neq 1$ si ha $x_k^\pm = \pm \frac{1}{-1+k} \sqrt{k^2 - k}$;

per $k = 1$ si ha $\frac{2\pi x}{1-2x^2+x^4} = 0$ se e solo se $x = 0$

4 - Si determinino i punti massimo e di minimo locali e assoluti di f (qualora esistano) ed il corrispondente valore della f .

R: I punti di massimo si hanno se $\cos \left(\pi \frac{x^2}{x^2-1} \right) = 1$, ovvero se $\frac{\pi x^2}{1-x^2} = k\pi$ con k pari, ovvero $k = 2h$, per cui si ha

$x = \pm \frac{1}{-1+2h} \sqrt{((-1+2h)2h)} = \pm \frac{1}{-1+2h} \sqrt{2\sqrt{((-1+2h)h)}}$ gli altri punti sono di minimo; resta da analizzare il punto $x = 0$: esso è un altro punto di massimo.

5 - Si determini il massimo ed il minimo della f ristretta all'intervallo $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$;

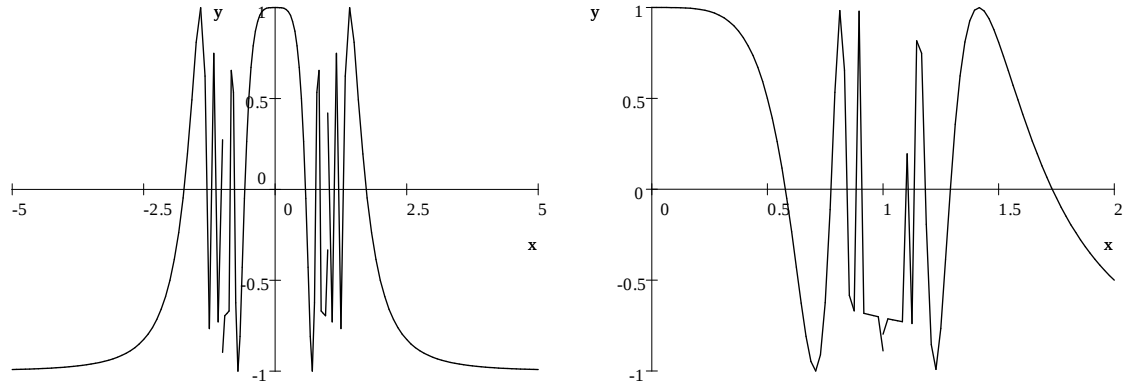
R: In tale intervallo non ci sono punti critici e la funzione è decrescente; dunque

$$\max = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}; \min = f(2) = -\frac{1}{2}$$

6 - Si determinino gli eventuali asintoti di f

R: Il punto $x = 1$ è un asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra

7- Grafico di f



Exercise 79 Si studi la seguente funzione tracciandone il grafico:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \sin \left(\frac{2\pi}{1+x^2} \right)$$

2 - Si determini l'insieme S dei punti singolari di f e si classifichi ciascun punto singolare.

R: Si ha $f'(x) = -4x^2 \left(\cos \frac{2\pi}{1+x^2} \right) \frac{\pi}{|x|(x^4+2x^2+1)}$. Poichè

$\lim_{x \rightarrow 0} -4x^2 \left(\cos \frac{2\pi}{1+x^2} \right) \frac{\pi}{|x|(x^4+2x^2+1)} = 0$, $f'(0)$ esiste e si ha $f'(0) = 0$. Dunque non ci sono punti singolari (o per essere più precisi il punto $x = 0$ è una singolarità removibile).

3 - Si determini l'insieme di tutti i punti critici di f

R: Si ha $x = 0$; Inoltre $\cos \frac{2\pi}{1+x^2} = 0$,

$\frac{2\pi}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, quindi: $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

$\frac{2\pi}{1+x^2} = \frac{3\pi}{2}$, quindi: $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}, x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

si può vedere che non ci sono altre soluzioni. Dunque l'insieme dei punti critici è dato da $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

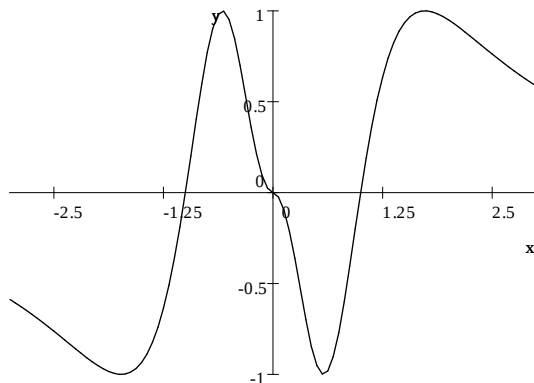
4 - Si determinino i punti massimo e di minimo locali e assoluti di f (qualora esistano) ed il corrispondente valore della f .

R: I punti $x = \sqrt{3}$ ed $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ sono punti di massimo assoluto con $f(x) = 1$ e i punti $x = -\sqrt{3}$ e $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ sono punti di minimo assoluto con $f(x) = -1$

5 - Si determinino gli eventuali asintoti di f

R: $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

6- Grafico di f



Exercise 80 ◇ Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = |(|x| \log |x|)|$$

1) La funzione data ha qualche simmetria?

R: Si, f è pari, ovvero $f(x) = f(-x)$.

2) si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Per come è definita la funzione dobbiamo solo calcolare il limite per $x \rightarrow 0^+$ per la funzione $x \log(x)$. Utilizzando la regola di L'Hospital si vede che $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$ e quindi il limite cercato è 0.

3) In quali punti $f(x)$ è derivabile?

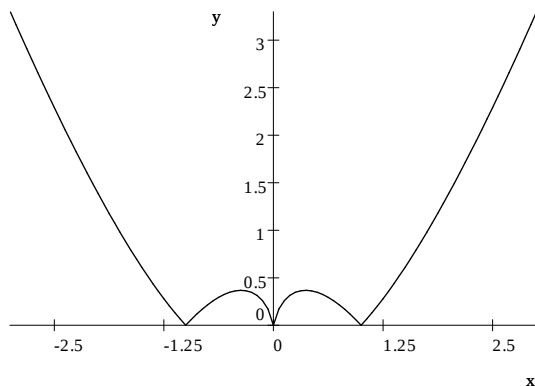
La funzione non è definita in 0, mentre è definita ma non derivabile nei punti $x = 1$, $x = -1$. In tutti gli altri punti la funzione è derivabile.

4) Determinare i massimi locali di f .

Per come è definita la funzione bisogna considerare $\frac{d(x \log(x))}{dx} = \log x + 1$, il punto critico è per $x = \frac{1}{e}$.

Questo è un massimo locale. Siccome la funzione è simmetrica anche $x = \frac{1}{e}$ è l'altro massimo locale.

5) Tracciare il grafico di f



6) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$.

Le soluzioni sono 2. Infatti $\frac{1}{2}$ è maggiore dei massimi locali. Il resto segue dalle solite considerazioni.

Exercise 81 $\diamond$ Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{per } x \neq \pm 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } x \in \{1, -1\} \end{cases}$$

- determinare il dominio della f e i punti dove essa è continua e derivabile.

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ e, come si verifica facilmente, è continua e derivabile in ogni punto $x \in \mathbf{R} - \{1, -1\}$. Nei punti ± 1 , la f è discontinua e dunque non derivabile.

- determinare l'estremo superiore e inferiore dei valori assunti dalla funzione.

Poiché per ogni y , $-\frac{\pi}{2} < \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$, inoltre $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ (e analogamente per $x = -1$). Dunque l'estremo superiore è $\frac{\pi}{2}$ e l'inf è $-\frac{\pi}{2}$.

- determinare, qualora esistano il massimo e il minimo globale della funzione.

Il massimo globale è $\frac{\pi}{2}$ e viene assunto in ± 1 , il minimo globale non esiste.

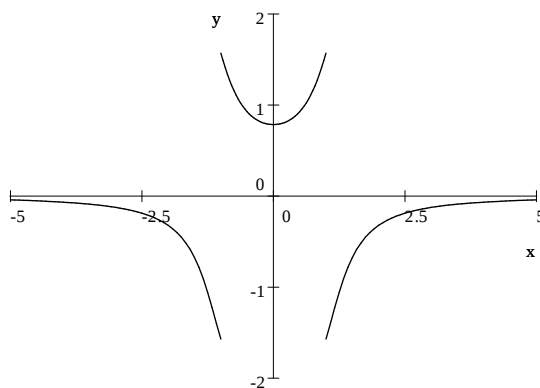
- *determinare i punti di massimo e minimo locale;*

I punti ± 1 sono di massimo locale. Negli altri punti la funzione è derivabile, quindi calcolando la derivata si trova che 0 è un minimo locale.

- *determinare (giustificando la risposta) se l'equazione $f(x) = 10x$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[-1, 1]$.*

Sì, applicando il teorema di Bolzano alla funzione $g(x) = f(x) - 10x$, poiché la funzione $g(x)$ è continua nell'intervallo in questione e inoltre $g(-1) < 0, g(1) > 0$ si vede che tale equazione ha almeno una soluzione.

- *Tracciare il grafico della funzione*



Exercise 82 Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = \max\left(e^{-2x}, \frac{e^{-2x}}{|1-x|}\right)$$

- *determinare il dominio della f e i punti dove essa è continua.*

La funzione è definita per $x \in \mathbf{R} - \{1\}$ e, come si verifica facilmente, è continua in ogni punto.

- *determinare se f è derivabile nei punti $x = 0$ ed $x = 2$.*

Se $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $f(x) = e^{-2x}$; se $x \in (0, 2) - \{1\}$, $f(x) = \frac{e^{-2x}}{|1-x|}$; dunque, se $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,

$$f'(x) = -2e^{-2x};$$

se $x \in (0, 2) - \{1\}$,

$$f'(x) = e^{-2x} \frac{-2|1-x| + \frac{|1-x|}{1-x}}{|1-x|^2} = -\text{sign}(x-1)e^{-2x} \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

dunque in $x = 0$ la derivata sinistra è -2 mentre la destra è -1 . In $x = 2$ la derivata sinistra è $-3e^{-4}$, mentre la destra è $-2e^{-4}$. Dunque in entrambi i punti la funzione non è derivabile.

- *determinare i punti di massimo e minimo locale;*

Per $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ la funzione è sempre decrescente (essendo un esponenziale). Per $x \in (2, +\infty)$ la derivata invece è

$\frac{d}{dx} \left(\frac{e^{-2x}}{|1-x|} \right) = e^{-2x} \frac{-2|1-x| + \frac{|1-x|}{1-x}}{|1-x|^2} = -e^{-2x} |1-x| \frac{2x-1}{(x-1)^3}$, che si annulla per $x = \frac{1}{2}$. Si verifica facilmente che questo è un punto di minimo locale. Dai calcoli fatti sopra si vede facilmente che i punti $x = 0, x = 2$ non sono punti di minimo o massimo locali.

- *determinare $\sup f$ e $\inf f$ e dire se coincidono con $\max f$ e $\min f$;*

Facendo i limiti alla frontiera del dominio si vede che

$$\sup f = +\infty; \quad \inf f = 0;$$

il massimo ed il minimo globale non esistono.

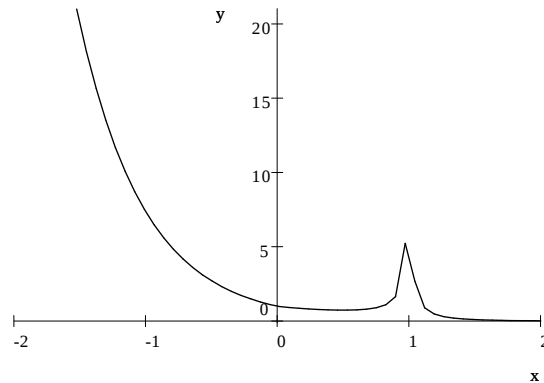
- *determinare se f ristretta all'intervallo $(1, +\infty)$ è iniettiva*

SI

in quanto la funzione è monotona decrescente avendo la derivata negativa.

- *Tracciare il grafico della funzione*

La funzione è derivabile per $x \neq 0, 2$ ed il grafico è il seguente



Exercise 83 $\diamond$ Si applichi il teorema di Lagrange per provare il seguente enunciato: non esiste alcuna funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

- (i) $f \in C^2(\mathbf{R})$
- (ii) $f(2) = 5$
- (iii) $f(3) = 8$
- (iv) $f'(x) \leq 2$ per ogni $x \in \mathbf{R}$

Se una tale funzione esistesse, applicando il teorema di Lagrange si otterrebbe che esiste un punto $\xi \in (2, 3)$ tale che $f(\xi) = 8 - 5 = 3$. Questo contraddice (iv) e quindi una tale funzione non esiste.

2) *Provare che esiste una funzione f che soddisfa, (i),(ii),(iii) e*

- *(iv') per ogni $x \in R$.*

R: La retta passante per i punti (2, 5) e (3, 8) soddisfa ovviamente tali ipotesi.

3) *Si calcoli*

$$\int_2^3 f'(x) dx$$

ove f soddisfa (i),(ii),(iii) e (iv').

R: Ovviamente, per il teorema fondamentale del calcolo si ha $\int_2^3 f'(x) dx = f(3) - f(2) = 8 - 5 = 3$

4) *Provare che non esiste alcuna funzione che soddisfi (i),(ii),(iii),(iv') e*

- *(v) $f''(x) \leq 2$ per ogni $x \in R$*

R: Applicando la formula di Taylor con il resto di Lagrange si ha (sviluppando a partire da $x = 2$) $f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-2)^2$, per qualche punto $\xi \in (2, 3)$ quindi considerando $x = 3$ si ottiene $3 = \frac{f''(\xi)}{2}$ cosa che e' impossibile visto che $f''(\xi) \leq 2$.

2.1.1 Uno studio di funzione proveniente da un problema ingegneristico.

In questa sezione ci occuperemo di uno studio di funzione che sorge da un problema di ricerca ingegneristica. Ovviamente questo esercizio è abbastanza più complesso di quello che si potrebbe ragionevolmente proporre in un esame, sicchè tranquilliti!

Abbiamo aggiunto l'esercizio a questa dispensa per dare un esempio di applicazione dei concetti dell'analisi elementare in ingegneria.

Non abbiamo qui spazio di spiegare quale e' il contesto in cui appare questo problema. Accenneremo soltanto che questo problema appare nello sviluppo di un particolare dispositivo capace da fungere da elettrogoniometro.

Per motivi lunghi da spiegare (e che contengono nozioni di matematica che esulano dagli scopi di un corso del primo anno) il funzionamento di questo dispositivo dipende dal comportamento della funzione $y = f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2h_0}{x}}$, $h_0 > 0$ quando x è vicino allo zero. h_0 è un parametro interno al sistema

(lo spessore di una certa striscia di gomma) che consideriamo costante.

Più precisamente quello che servirebbe all'ingegnere che vuole sviluppare il dispositivo sarebbe poter scrivere $f(x) \sim a + bx + [\text{termini ancora più piccoli quando } x \text{ è piccolo}]$, trovando i giusti valori per a e b e quindi trovando la migliore approssimazione lineare della funzione data per x vicine a zero.

Si nota subito però che la funzione data non e' neanche definita per $x = 0$. E allora come si fa?

Lo vedremo in quello che segue. Approfitteremo dell'occasione per studiare la funzione data, tracciandone un grafico verosimile.

Studio della funzione. $y = f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2h_0}{x}}, h_0 > 0$

C.E. La funzione è definita dove $\frac{1}{x^2} - \frac{2h_0}{x} \geq 0$ e $x \neq 0$, quindi $0 < x \leq \frac{1}{2h}$.
Si vede subito che nel punto notevole $x = \frac{1}{2h_0}$, $f(x) = 2h_0$.

Segno $\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2h_0}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2h_0}{x}}$, siccome entrambi i membri

sono positivi elevo al quadrato ottenendo $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x^2} - \frac{2h_0}{x} \Leftrightarrow \frac{2h_0}{x} \geq 0$.

Da cui si ottiene che essendo sia x che h positivi (poiché il campo di esistenza comprende solo x positivi) la funzione è sempre positiva.

Limiti L'unico punto alla frontiera del dominio è $x = 0$. Quindi si cercherà se

esiste $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2h_0}{x}}$.

Si nota che $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2h_0}{x}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0x}}{x}$ in questa forma la f soddisfa le condizioni prescritte dal teorema detto 'dell'Hopital' (de L'Hopital?) quindi (essendo $\frac{d}{dx}(1 - \sqrt{1 - 2h_0x}) = \frac{1}{2} \frac{2h_0}{\sqrt{1 - 2h_0x}}$) si vedrà se esiste $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \frac{2h_0}{\sqrt{1 - 2h_0x}}}{1}$, facilmente si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{1 - hx}} = h$ quindi il limite cercato è h_0 .

Notiamo che quindi la f può essere prolungata con continuità in 0 ponendo $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{2h_0} \\ h_0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Regolarità Essendo composta come somma, prodotto, inverso e composizione di funzioni continue la f è C^0 in ogni punto in cui è definita.

La radice quadrata non è derivabile in $x = 0$ ma lo è in tutti gli altri punti del dominio non è detto che la f sia derivabile in 0 (vedremo fra poco).

La f è comunque derivabile infinite volte in tutti gli altri punti del dominio.

Derivate-Crescenza Nei punti del dominio $\frac{d}{dx}(\frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0x}}{x}) = \frac{1}{x} \frac{h_0}{\sqrt{1 - 2h_0x}} + \frac{1}{x^2} (\sqrt{1 - 2h_0x} - 1) = \frac{-2\sqrt{1 - 2h_0x} - 2h_0x + 2}{2x^2\sqrt{1 - 2h_0x}}$ da cui $f' \geq 0 \iff 2 - 2\sqrt{1 - 2h_0x} - 2h_0x \geq 0 \iff 2\sqrt{1 - 2h_0x} \leq 2 - 2h_0x$ elevando al quadrato, come sopra e semplificando si ha $0 \leq h^2x^2$, quindi la derivata è sempre positiva e la funzione è strettamente crescente.

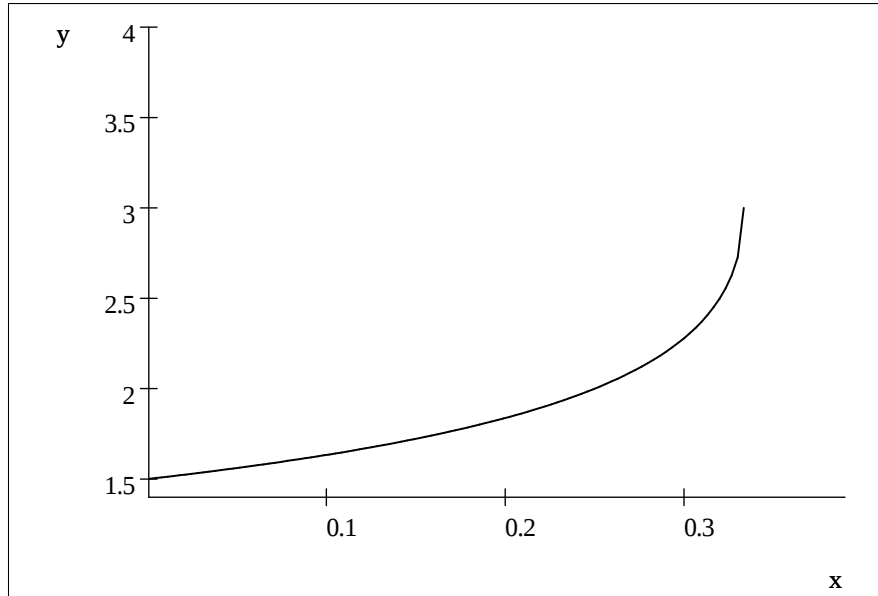
La derivata non è definita in $x = \frac{1}{2h}$, inoltre $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2h}} f'(x) = \infty$. La f non è derivabile in $x = \frac{1}{2h}$.

Una domanda interessante (e utile) è la seguente: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = ?$, o **quasi** equivalentemente: La $\bar{f}$ è derivabile in 0?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sqrt{1-2xh_0} - 2hx + 2}{2x^2\sqrt{1-2xh_0}} = ?$$

Avendo capito che il termine più importante nel denominatore è x^2 , svilupperemo la radice quadrata presente nel denominatore utilizzando la formula di Taylor fino al secondo ordine (*per x vicini a 0*). Si ottiene $-2\sqrt{1-2xh_0} = -2 + 2h_0x + h_0^2x^2 + o(x^2)$ (infatti $\frac{d}{dx}(-2\sqrt{1-2xh_0}) = 2\frac{h_0}{\sqrt{1-2xh_0}}$, $\frac{d}{dx}(2\frac{h_0}{\sqrt{1-2xh_0}}) = 2\frac{h_0^2}{\sqrt{1-2xh_0} - 2xh_0\sqrt{1-2xh_0}}$). Inserendo quanto trovato nel limite ignoto si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sqrt{1-2xh_0} - 2hx + 2}{2x^2\sqrt{1-2xh_0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 + 2h_0x + h_0^2x^2 + o(x^2) + 2 + 2hx}{2x^2\sqrt{1-2xh_0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_0^2x^2 + o(x^2)}{2x^2\sqrt{1-2xh_0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_0^2x^2}{2x^2\sqrt{1-2xh_0}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{2x^2\sqrt{1-2xh_0}} = \frac{h_0^2}{2} + 0$ (per la definizione stessa di $o()$).

Dunque il limite cercato è $\frac{h_0^2}{2}$ e la funzione $\bar{f}$ è derivabile in 0 (in quanto esiste il limite della derivata in 0, si ricorda che questo segue dal teorema di Lagrange e di questo abbiamo parlato a lezione).



$$y = \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}}$$

Comportamento della funzione vicino a 0. Da quanto visto, vicino a

$x = 0$ si ha $\bar{f}(x) = h_0 + \frac{h_0^2}{2}x + o(x)$.

2.2 Integrali,

Exercise 84 Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^2 x\sqrt{1+x^2} dx$$

R: L'integrale è del tipo $\int f'g(f)$ quindi, $\int_0^2 x\sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3\right]_0^2 = \frac{5}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}$

Exercise 85 Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^1 e^{\sin 2x} \cos 2x dx$$

$$\int_0^1 [x + g''(x)] dx.$$

Sapendo che $g(x)$ è derivabile due volte in tutto $\mathbf{R}$, - $\forall x > 1$, $g(x) = 0$, - $g(0) = 7$; $g'(0) = 3$.

R: Il primo integrale è del tipo $\int f'(g)g'$, quindi $\int_0^1 e^{\sin 2x} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2}e^{\sin 2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^{\sin 2} - \frac{1}{2}$. Il secondo si ottiene integrando gli addendi $\int_0^1 [x + g''(x)] dx = \int_0^1 x dx + g'(1) - g'(0) = \frac{1}{2} + 0 - 3 = -\frac{5}{2}$.

Exercise 86 Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-4} dx; \int_0^1 f'(x) \sin x dx$$

ove f è una funzione che soddisfa le seguenti ipotesi: $f(0) = f(1) = 1$; $\int_0^1 f(x) \cos x dx = 0$

R: Il primo integrale è quello di una funzione razionale, quindi $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-4} dx = [x + \ln|x-2| - \ln|x+2|]_0^1 = 1 - \ln 3 - 2 \ln 2$.

Il secondo integrale si ottiene per parti, $\int_0^1 f'(x) \sin x dx = [f(x) \sin x]_{x=0}^1 - \int_0^1 f(x) \cos x dx = \sin 1$

Exercise 87 $\diamond$ Si calcolino i seguenti integrali:

$$i) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$$

$$ii) \int_0^1 xg''(x) dx$$

sapendo che : $g(x)$ è derivabile due volte in tutto $\mathbf{R}$, $\forall x > 1$, $g(x) = 0$, $g(0) = 7$.

$$\begin{aligned} \text{R: i)} \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx &= \int_0^1 \frac{e^{2x}+1-1}{e^x+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} + \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1} dx = [e^x - \ln(e^x+1)]_{x=0}^{x=1} = \\ &= e - \ln(e+1) - 1 + \ln 2 \\ \text{ii)} \int_0^1 x g''(x) dx &\underset{\text{Per parti}}{=} [x g'(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 g'(x) dx = g'(1) - g(1) + g(0) = \\ &= 0 - 0 + 7 = 7 \end{aligned}$$

Exercise 88 Calcolare i seguenti integrali

$$\begin{aligned} \text{i)} \int_0^1 \frac{x^4}{x^2-4} dx; \\ \text{ii)} \int_0^1 f'(x) e^x dx; \\ \text{iii)} \int_0^1 f'(x) x dx \end{aligned}$$

ove f è una funzione che soddisfa le seguenti ipotesi:

$$f(0) = f(1) = 1; \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) e^x dx = 0$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \text{ Con lo stesso trucco dell'esercizio precedente } \int_0^1 \frac{x^4}{x^2-4} dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 + 4x + 4 \log|x-2| - 4 \log|x+2| \right]_{x=0}^1 = \\ &= \frac{1}{3} + 4 - 4 \log 3 - 4 \log 2 + 4 \log 2 = \frac{13}{3} - 4 \log 3 \\ \text{ii)} \text{ Integrando per parti } \int_0^1 f'(x) e^x dx &= [f(x) e^x]_{x=0}^1 - \int_0^1 f(x) e^x dx = e - 1 \\ \text{iii)} \text{ Integrando per parti } \int_0^1 f'(x) x dx &= [f(x) x]_{x=0}^1 - \int_0^1 f(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Exercise 89 Determinare una primitiva della funzione $e^{-x} (2x^2 - x)$.

$$\text{R: Integrando per parti } \int e^{-x} (2x^2 - x) dx = -2e^{-x} x^2 - 3e^{-x} x - 3e^{-x} + c.$$

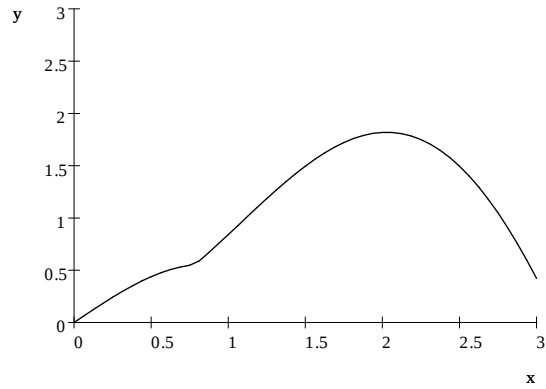
$$2 - \text{Calcolare il seguente integrale: } \int_0^\infty e^{-x} (2x^2 - x) dx$$

R: Indicando con $g(x)$ la primitiva, trovata al punto precedente si ha $\lim_{a \rightarrow \infty} (g(0) - g(a)) = 3$.

Exercise 90 Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\pi x \max(\cos x, \sin x) dx$$

R: Per $x \leq \frac{\pi}{2}$ si ha $\max(\cos x, \sin x) = \cos x$, per $x \geq \frac{\pi}{2}$ $\max(\cos x, \sin x) = \sin x$, quindi la funzione da integrare ha la forma



E quindi si avrà $\int_0^\pi x \max(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\pi/4} x \max(\cos x, \sin x) dx + \int_{\pi/4}^\pi x \max(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\pi/4} x \cos x dx + \int_{\pi/4}^\pi x \sin x dx$. Ma

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x; \quad \int_0^{\pi/4} x \cos x dx = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\pi\sqrt{2} - 1$$

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x; \quad \int_{\pi/4}^\pi x \sin x dx = \pi - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\pi\sqrt{2}$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \max(\cos x, \sin x) dx &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\pi\sqrt{2} - 1 \right) + \left(\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\pi\sqrt{2} \right) \\ &= \frac{1}{4}\pi\sqrt{2} - 1 + \pi. \end{aligned}$$

Exercise 91 Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = \max\left(\frac{1}{1+x^2}, 3-x^2\right)$$

Calcolare i seguenti integrali

$$i) \int_0^1 f(x) dx;$$

$$ii) \int_0^2 f(x) dx;$$

$$iii) \int_0^\infty f(x) dx$$

$$i) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3-x^2) dx = \frac{8}{3}$$

Se $x_0 = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ è il punto dove $\frac{1}{1+x^2} = 3 - x^2$ (si veda l'esercizio 75) si ha

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^{x_0} (3 - x^2) dx + \int_{x_0}^2 \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{1 + \sqrt{3}} [8 - \sqrt{3}] + \arctan 2 - \arctan \sqrt{1 + \sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x) dx &= \int_0^{x_0} (3 - x^2) dx + \int_{x_0}^\infty \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{1 + \sqrt{3}} [8 - \sqrt{3}] + \frac{1}{2} \pi - \arctan \sqrt{1 + \sqrt{3}}\end{aligned}$$

2-Determinare la primitiva di f che vale 0 nel punto 0.

R:

$$F(x) = \begin{cases} 3x - \frac{1}{3}x^3 & \text{per } x \in (-x_0, x_0) \\ \arctan x - \arctan x_0 + 3x_0 - \frac{1}{3}x_0^3 & \text{per } x \notin (-x_0, x_0) \end{cases}$$

Exercise 92 Si consideri la frazione razionale

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)};$$

(a) scomporre in fratti semplici (si veda la teoria della integrazione delle funzioni razionali)

$$\mathbf{R:} \frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)} = -\frac{2}{x+1} + \frac{1+2x}{x^2+x+1}$$

(b) calcolare una primitiva di $f(x)$

$$\mathbf{R:} \int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)} = -2 \ln(x+1) + \ln(x^2+x+1) + C$$

(c) calcolare l'integrale improprio

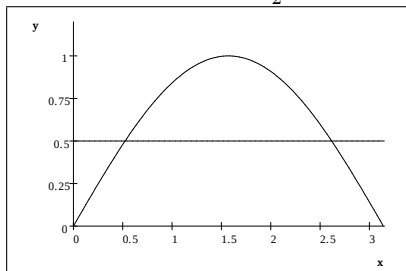
$$\int_1^\infty \frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)} dx =$$

$$\mathbf{R:} \int_1^\infty \frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)} dx = 2 \ln 2 - \ln 3$$

Exercise 93 Si calcoli i seguenti integrali;

$$\int_0^\pi \max\left(\frac{1}{2}, \sin x\right) dx; \quad \int_0^1 \frac{x^5}{(x-2)^2} dx$$

R: In $[0, \pi]$, $\sin x = \frac{1}{2}$ per $x = \frac{1}{6}\pi$; $x = \frac{5}{6}\pi$ (si veda la figura), dunque



$$\int_0^3 \max(1, \sin x) dx = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{2} dx + \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \sin x dx + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{12}\pi + \sqrt{3} + \frac{1}{12}\pi = \sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi$$

$$\frac{x^5}{(x-2)^2} = x^3 + 4x^2 + 12x + 32 + \frac{80x - 128}{(-2+x)^2} = x^3 + 4x^2 + 12x + 32 + \frac{32}{(-2+x)^2} + \frac{80}{-2+x}$$

inoltre

$$\int \frac{1}{(-2+x)^2} dx = -\frac{1}{-2+x} + c$$

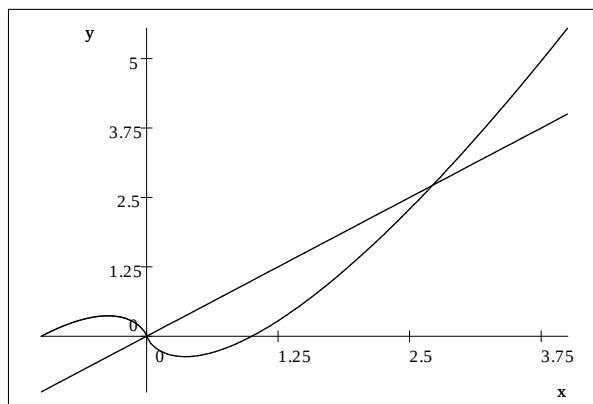
$$\int \frac{1}{-2+x} dx = \log|x-2| + c$$

per cui

$$\int_0^1 \frac{x^5}{(x-2)^2} dx = \int_0^1 \left(x^3 + 4x^2 + 12x + 32 + \frac{32}{(-2+x)^2} + \frac{80}{-2+x} \right) dx = \frac{667}{12} - 80 \log 2$$

Exercise 94 Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-1}^4 \min(x \log|x|; x) dx.$$



$x \log |x| = x$, ha soluzione $\{x = e; x = 0\}$ in quanto la singolarità in 0 di $x \log |x|$ è removibile.

Per cui (si veda anche la figura)

$$\int_{-1}^4 \min(x \log |x|; x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^e x \log |x| dx + \int_e^4 x dx$$

dato che $\int x \log |x| dx = \frac{1}{4} (2 \log |x| - 1) x^2 + c$, risulta che

$$\int_{-1}^4 \min(x \log |x|; x) dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^2 + \left(8 - \frac{1}{2}e^2\right) = \frac{15}{2} - \frac{1}{4}e^2.$$

2.3 Equazioni Differenziali

Exercise 95 $\diamond$ Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\sin(y))^2 + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1) Senza tentare inutilmente di risolvere esplicitamente l'equazione differenziale si verifichi che il problema ha un' unica soluzione.

R: La soluzione esiste ed è unica. Questo discende dai teoremi generali riguardanti l'esistenza e l'unicità di soluzioni di equazioni differenziali. Infatti il secondo membro dell'equazione differenziale è una funzione continua e derivabile con continuità in un intorno del punto iniziale (Si veda la sezione 3.1).

2) Si chiami $y(x)$ la soluzione trovata. Si determinino $y'(0)$ e $y''(0)$.

R: Sapendo che $y(0) = 0$ si ha $y'(0) = (\sin(0))^2 + 0 = 0$. Quindi sapendo che $\frac{d \sin^2(x)}{dx} = \sin 2x$ si ha $y''(x) = y'(x) \sin(2y(x)) + 1$ e quindi avendo già calcolato $y'(0)$ otteniamo $y''(0) = 0 + 1 = 1$

3) Si determini il sup di $y(x)$

R: Si nota subito che per $x \geq 0$ la y è crescente (la derivata è positiva), inoltre per $x \geq 1$ si ha $y > 0$ e $y' \geq 1$. Quindi $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$ e quindi il sup è ∞ .

4) Si calcoli $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x^3}$ (un possibile metodo si basa sull'applicazione della regola dei L'Hospital).

R: Da quanto detto in precedenza si deduce che siamo nelle condizioni in cui si può applicare il teorema di de L'Hopital quindi $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin(y))^2 + x}{3x^2} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{x^3} = 0$

Exercise 96 $\diamond$ Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot \max(2t, 6+t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

1- Si verifichi (usando i teoremi relativi) che questo problema di Cauchy ammette un'unica soluzione su tutto R .

R: L'equazione può essere scritta nel seguente modo

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = 0$$

ove $a(t) = -\max(2t, 6+t)$. Dunque abbiamo un'equazione lineare omogenea a coefficienti variabili continui. Pertanto il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione ove $a(t)$ risulta definita (Si veda la sezione 3.1).

2 - Si risolva il problema di Cauchy dato

R: L'equazione $2t = 6+t$ ha come soluzione $t = 6$; dunque, per $t \in (-\infty, 6]$ la nostra soluzione soddisfa il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot (6+t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione $\frac{dx}{dt} = x \cdot (6+t)$ ha la soluzione $x(t) = ce^{\frac{1}{2}t(12+t)}$ e dunque la nostra soluzione è

$$x(t) = e^{\frac{1}{2}t(12+t)} \text{ per } t \in (-\infty, 6].$$

La soluzione trovata, nel punto $x = 6$ assume il valore e^{54} . Dal punto $x = 6$ in poi bisognerà prolungare la soluzione utilizzando l'equazione differenziale $\frac{dx}{dt} = 2xt$. Per $t \geq 6$ la soluzione del nostro sistema soddisfa il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xt \\ x(6) = e^{54} \end{cases}$$

L'equazione $\frac{dx}{dt} = 2xt$ ha soluzione $x(t) = ce^{t^2}$. Per determinare c si deve risolvere l'equazione

$$ce^{6^2} = e^{54}$$

da cui

$$c = e^{54-36} = e^{18}$$

Concludendo la soluzione cercata è

$$x(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}t(12+t)} & \text{per } t \in (-\infty, 6] \\ e^{18+t^2} & \text{per } t \in [6, +\infty) \end{cases} \quad \dots$$

Exercise 97 Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot \min(t, -1+2t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

1 - Si verifichi (usando i teoremi relativi) che questo problema di Cauchy ammette un'unica soluzione su tutto R .

R: Come sopra, l'equazione può essere scritta nel seguente modo

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = 0$$

ove $a(t) = -\min(t, -1 + 2t)$. Dunque abbiamo un'equazione lineare omogenea a coefficienti variabili continui. Pertanto il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione ove $a(t)$ risulta definita.

2 - Si risolva il problema di Cauchy dato

R: L'equazione $t = -1 + 2t$ ha come soluzione $t = 1$; dunque, per $t \in (-\infty, 1]$ la nostra soluzione soddisfa il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot (-1 + 2t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione $\frac{dx}{dt} = x \cdot (-1 + 2t)$ ha la soluzione $x(t) = ce^{t(-1+t)}$ e dunque la nostra soluzione è

$$x(t) = e^{t(-1+t)} \text{ per } t \in (-\infty, 1].$$

Per $t \geq 1$ la soluzione del nostro sistema soddisfa il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xt \\ x(1) = 1 \end{cases}.$$

L'equazione $\frac{dx}{dt} = xt$ ha soluzione $x(t) = ce^{t^2/2}$. Per determinare c si deve risolvere l'equazione

$$ce^{1/2} = 1$$

da cui

$$c = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Concludendo la soluzione cercata è

$$x(t) = \begin{cases} e^{t(-1+t)} & \text{per } t \in (-\infty, 1] \\ \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{e}} & \text{per } t \in [1, +\infty) \end{cases}.$$

Exercise 98 $\diamond$ Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2 + \sin(xt) \\ x(3) = 5 \end{cases}$$

1- Si determini se esiste una soluzione locale e se questa è unica

R: La funzione $2 + \sin(xt)$ è continua in un intorno del punto $(3, 5)$ quindi una soluzione locale esiste. Poiché $2 + \sin(xt)$ ha derivate parziali continue la soluzione è unica (vedi la sezione 3.1).

2- Si determini se esiste una soluzione definita per ogni $t \in \mathbf{R}$

R: $\frac{|2 + \sin(xt)|}{|x|}$ è limitata al crescere di x , quindi la soluzione può essere prolungata su tutto $\mathbf{R}$ (si veda l'osservazione 150, ma in realtà qui serve qualcosa di più forte, si veda nei libri il teorema di prolungabilità delle soluzioni delle eq. diff.).

3- Si dimostri che la soluzione $x(t)$ è strettamente crescente

R: $2 + \sin(xt) > 0 \forall x, t$ quindi ogni soluzione di questa equazione differenziale ha derivata strettamente positiva in tutti i punti e dunque $x(t)$ è strettamente crescente.

4- Sicalcoli $\frac{d^2x}{dt^2}$ nel punto $x = 3$

R: Sia $x(t)$ la soluzione, allora calcolando la derivata seconda, utilizzando il fatto che $x'(t) = 2 + \sin(x(t)t)$ si ha $x'(3) = 2 + \sin(15)$, inoltre:

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{d}{dt} x'(t) \\ &= \frac{d}{dt} (2 + \sin(x(t)t)) \\ &= \cos(x(t)t) \frac{d}{dt} (x(t)t) \\ &= \cos(x(t)t) [x'(t)t + x(t)] \\ &= \cos(x(t)t) [(2 + \sin(xt))t + x] \\ &= \cos(5 \cdot 3) [(2 + \sin(5 \cdot 3))3 + 5] \\ &= \cos(15) [(6 + 3\sin(15)) + 5] \\ &= \cos(15) [11 + 3\sin(15)]. \end{aligned}$$

Remark 99 Si noterà che non abbiamo tentato di risolvere esplicitamente l'equazione differenziale. Questa sembra impresa non banale perché l'equazione non è lineare e non è a variabili separabili. Abbiamo visto che con facili ragionamenti e con l'uso dei teoremi generali è possibile rispondere alle domande poste anche senza avere una formula per la soluzione.

Exercise 100 Determinare per quali valori dei parametri a e b la seguente equazione NON ha alcuna soluzione periodica

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + y = \sin t.$$

R. Se $\sin t$ non è una soluzione dell'omogenea associata, l'insieme di tutte le soluzioni ha la struttura

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

ove c_1 e c_2 dipendono dalle condizioni iniziali (si veda la sezione sul metodo dei coeff. ind. 3.6). Dunque scegliendo $c_1 = c_2 = 0$ si ottiene una soluzione periodica. Pertanto per non avere soluzioni periodiche è NECESSARIO che $\sin t$ sia soluzione della omogenea associata, e quindi è necessario che il polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + a\lambda + b$$

abbia come radici i e $-i$. Questo capita per $a = 0$ e $b = 1$. In questo caso la soluzione generale è data da

$$y(t) = At \cos t + Bt \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

ed anche senza calcolare esplicitamente i valori di A e B si ha che queste soluzioni non sono periodiche (si osservi che questo è proprio il caso della risonanza).

Exercise 101 $\diamond$ Si consideri il seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} u' = |u + 1| \\ u(0) = c \end{cases}$$

1- Si determinino al variare di c le soluzioni del problema.

R: Si ha che se $c = -1$ la funzione costante $u(x) = -1$ è soluzione.

Se $c > -1$ si ha che in un intorno del punto iniziale la soluzione deve soddisfare l'equazione $u' = u + 1$, da cui $u(x) = -1 + e^x(c + 1)$. Si vede che queste soluzione resta sempre nel settore $u > -1$, quindi può essere prolungata su tutto $\mathbf{R}$.

Se $c < -1$ si ha che in un intorno del punto iniziale la soluzione deve soddisfare l'equazione $u' = -u - 1$, da cui $u(x) = -1 + e^{-x}(c + 1)$. Anche questa soluzione si prolunga su tutto $\mathbf{R}$.

2) Si trovino le soluzioni il seguente problema

$$\begin{cases} u' = |u + 1| \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

R: Il problema dato non è un problema di Cauchy, ma da quanto visto sopra le soluzioni della eq. diff. $u' = |u + 1|$ sono del tipo

i) $u(x) = -1 + e^x C$ oppure

ii) $u(x) = -1 + e^{-x} C$.

Derivando si vede che per le soluzioni del tipo i) $u'(0) = C$, da cui $C = 1$, che dà la soluzione $u(x) = -1 + e^x$. Se u è del tipo ii) $u'(0) = -C$ da cui $C = -1$. Si ha quindi anche la soluzione $u(x) = -1 + -e^{-x}$. Il dato problema ha dunque due soluzioni

Exercise 102 $\diamond$ Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \max(x, y) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

R: Si nota che il piano $\mathbf{R}^2$ dove è definita l'equazione differenziale è diviso in due parti dalla retta $y = x$. "Sopra" la retta avremo $y > x$ e l'equazione $\frac{dy}{dx} = y$, "sotto" la retta avremo $y < x$ e l'equazione $\frac{dy}{dx} = x$. Il punto iniziale $(0, -1)$ si trova sotto la retta, per cui in un intorno di questo punto la soluzione coincide con la soluzione di

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

ovvero $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$. Tale soluzione rimane valida fintanto che $y(x) \leq x$, ovvero fino ai punti soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{2}x^2 - 1 = x$$

ovvero $x = 1 + \sqrt{3}$ e $x = 1 - \sqrt{3}$. Nell'intervallo $(1 + \sqrt{3}, +\infty)$, la soluzione è data da

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

per cui la soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{e^{1+\sqrt{3}}} e^x$$

Analogamente, nell'intervallo $(-\infty, 1 - \sqrt{3})$, la soluzione è data da

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(1 - \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

per cui la soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1 - \sqrt{3}}{e^{1-\sqrt{3}}} e^x$$

Dunque

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{3}}{e^{1-\sqrt{3}}} e^x & \text{per } x \leq -\sqrt{3} + 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - 1 & \text{per } -\sqrt{3} + 1 \leq x \leq \sqrt{3} + 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{e^{1+\sqrt{3}}} e^x & \text{per } x \geq \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

Exercise 103 $\diamond$ Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' + 6y' + 25y = 0$$

$$y'' + 6y' + 25y = t$$

R: Il polinomio associato alla prima è $x^2 + 6x + 25 = (x - 4i + 3)(x + 4i + 3)$ quindi $y(t) = C_1 e^{-3t} \sin 4t + C_2 e^{-3t} \cos 4t$.

Per quanto riguarda la seconda si nota che t (e ogni polinomio) non è soluzione della prima (che è l'equazione omogenea associata alla seconda), quindi utilizzando il metodo dei coefficienti indeterminati (si veda la sezione 3.6), che ci indica di provare un polinomio di primo grado si ha $y(t) = \frac{1}{25}t - \frac{6}{625} + C_1 e^{-3t} \sin 4t + C_2 e^{-3t} \cos 4t$.

2-Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 25y = t \\ y(0) = -\frac{6}{625} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

R: Si deve solo trovare il valore delle costanti nella soluzione generale utilizzando le condizioni iniziali date. Dunque si ha $y(t) = \frac{1}{25}t - \frac{6}{625} - \frac{1}{100}e^{-3t} \sin 4t$

Exercise 104 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$y'' + 2y' + 2y = \pi$$

R: Come sopra...

$$\begin{aligned}
 y(t) &= C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t \\
 y(t) &= \frac{1}{2} \pi + C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t \\
 y'' + 2y' + 2y &= t \\
 y(t) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t + C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t
 \end{aligned}$$

2—Risolvere il seguente problema di Cauchy

Ragionando come negli esercizi 96, 97

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \max(\pi, t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi (1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) & \text{per } t \leq \pi \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} e^{-t} [e^{\pi} \cos t + \pi \cos t + \pi \sin t] & \text{per } t \geq \pi \end{cases}$$

Exercise 105 $\diamond$ Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e tracciare il grafico della soluzione

R: Il problema è a variabili separabili, quindi

$$\begin{aligned}
 y dy &= x dx \\
 y^2 &= x^2 + C \\
 C &= 1 \\
 y &= \sqrt{1 + x^2}
 \end{aligned}$$

Grafico della soluzione

Exercise 106 $\diamond$ *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = xe^y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{dy}{e^y} &= x dx \\ -e^{-y} &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ y &= -\ln\left(-\frac{1}{2}x^2 - C\right) \end{aligned}$$

Dal dato iniziale si ottiene

$$y(x) = -\ln\left(-\frac{1}{2}x^2 + e^{-2}\right).$$

Exercise 107 *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \sin x e^y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{dy}{e^y} &= \sin x \, dx \\ -e^{-y} &= -\cos x + C \\ y &= -\ln(\cos x - C) \end{aligned}$$

Dal dato iniziale si ottiene

$$y(x) = -\ln(\cos x + e^{-2} - 1).$$

Exercise 108 *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

R: L'equazione è a variabili separabili. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{dy}{e^y} &= e^x \, dx \\ -e^{-y} &= e^x + C \\ y &= -\ln(-e^x - C) \end{aligned}$$

Dal dato iniziale si ottiene

$$y(x) = -\ln(-e^x + e^{-2} + 1).$$

Exercise 109 *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y \log x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

R: L'equazione è a variabili separabili. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \log x \, dx \\ \log y &= x \ln x - x + C \\ y &= K e^{x \ln x} e^{-x} = K \frac{x^x}{e^x} \end{aligned}$$

Dal dato iniziale si ottiene

$$y(x) = e \frac{x^x}{e^x} = x^x e^{1-x}$$

2- Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} e^{1-x} = e^0 e^1 = e.$$

Exercise 110 *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y \tan x \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

R: L'equazione è a variabili separabili. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \tan x \, dx \\ \log y &= -\log(\cos x) + C \\ y &= \frac{K}{\cos x} \end{aligned}$$

Dal dato iniziale si ottiene

$$y(x) = \frac{2}{\cos x}$$

2- Calcolare $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} y(x) (x - \frac{\pi}{2})$

R: Utilizzando il teorema di de L'Hopital si ha

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} 2 \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} = 2 \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{-\sin x} = -2.$$

Exercise 111 *Si consideri l'insieme $A = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \forall x \, f''(x) = 3f(x), f(0) = 0\}$, ovvero A contiene le funzioni che risolvono*
$$\begin{cases} f'' = f \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

1) Quanti elementi contiene A ?

Poiche $\begin{cases} f'' = f \\ f'(0) = K \\ f(0) = 0 \end{cases}$ ha una unica soluzione per ogni K (vedi teoria eq.

diff.), e tutte queste risolvono $\begin{cases} f'' = f \\ f(0) = 0 \end{cases}$. L'insieme contiene infiniti elementi.

2) A è un sottospazio vettoriale di $C^1(\mathbb{R})$?

Si, se f risolve $\begin{cases} f'' = f \\ f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ allora Kf risolve $\begin{cases} f'' = f \\ f'(0) = K \\ f(0) = 0 \end{cases}$, quindi l'insieme

cercato e' una retta, data dai multipli reali della funzione f .

3) Si consideri l'insieme $B = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \forall x \ f''(x) = 3f(x), f(0) = 0, f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1\}$. Quanti e quali sono i suoi elementi?

R: Le soluzioni della eq diff $f'' = 3f$, sono le funzioni date da $C_1 e^{t\sqrt{3}} + C_2 e^{-t\sqrt{3}}$.

Per avere $f(0) = 0$ si deve avere $C_1 + C_2 = 0$. Mentre $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1$ implica $eC_1 + e^{-1}C_2 = 1$.

Queste due equazioni danno $C_1 = \frac{1}{e-e^{-1}}, C_2 = \frac{-1}{e-e^{-1}}$ quindi $\frac{1}{e-e^{-1}}(e^{t\sqrt{3}} - e^{-t\sqrt{3}})$ è l'unica funzione contenuta in B .

2.4 Algebra Lineare

Exercise 112 $\diamond$ Sia $\mathcal{P}_2$ l'insieme dei polinomi di grado ≤ 2 . Su $\mathcal{P}_2$ si consideri l'operatore lineare

$$L : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$$

definito da

$$Lp = p'' + 2p.$$

1- determinare una base per $\mathcal{P}_2$.

Una base per $\mathcal{P}_2$ è $\{x^2, x, 1\}$. Banalmente si ha che questi tre elementi generano tutto lo spazio (ogni polinomio si scrive come combinazione lineare di monomi).

I tre elementi sono anche linearmente indipendenti, infatti se non fosse così si avrebbe che $0 = a1 + bx + cx^2$ con a, b, c costanti, non tutti nulli.

Vedremo che questo porta ad un assurdo.

$0 = a1 + bx + cx^2$ deve essere una identità fra polinomi e quindi deve valere per tutti gli x . Ponendo $x = 0$ si ottiene $a = 0$. Quindi si ha $0 = bx + cx^2$ dividendo per x si ottiene $0 = b + cx$ (per ogni $x \neq 0$) da cui $x = -\frac{b}{c}$ assurdo, visto che x può variare in $R - \{0\}$.

2- determinare la matrice associata ad L relativamente alla base trovata.

R: Poiché

$$D^2(ax^2 + bx + c) = 2a$$

e cioè applicando l'operatore agli elementi della base si ha

$$D^2(1) = 0 = 0 * 1 + 0 * x + 0 * x^2$$

$$D^2(x) = 0 = 0 * 1 + 0 * x + 0 * x^2$$

$$D^2(x^2) = 2 * 1 + 0 * x + 0 * x^2$$

la matrice associata a D^2 (relativamente alla base $\{x^2, x, 1\}$) è

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'operatore L si può scrivere come $L = D^2 + 2I$ dunque la matrice associata ad L è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3 - Determinare se L è invertibile.

R: Poiché il determinante di A è $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, la matrice è invertibile.

4 - Determinare gli autovalori di L .

R: Poiché A è triangolare, gli elementi della sua diagonale sono gli autovalori, ovvero $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Exercise 113 $\diamond$ Sia $\mathcal{P}_2$ l'insieme dei polinomi di grado ≤ 2 . Su $\mathcal{P}_2$ si consideri l'operatore lineare

$$L : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$$

definito da

$$Lp = p'' + p'.$$

1- determinare una base per P_2

R: Come prima, una base per P_2 è data da $\{x^2, x, 1\}$.

2- determinare la matrice associata ad L relativamente alla base trovata.

Poichè

$$\begin{aligned} D(ax^2 + bx + c) &= 2ax + b \\ D^2(ax^2 + bx + c) &= 2a \end{aligned}$$

le matrici associate a D e a D^2 (relativamente alla base $\{x^2, x, 1\}$) sono

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dunque la matrice associata ad $L = D^2 + D$ è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3 - Determinare se L è invertibile.

R: Poichè il determinante di A è 0, la matrice non è invertibile.

4 - Determinare gli autovalori di L .

R: Poichè A è triangolare, gli elementi della sua diagonale sono gli autovalori, ovvero $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exercise 114 Determinare una matrice ortogonale che diagonalizza la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

R: Poiché la matrice è simmetrica essa avrà una base ortogonale di autovettori.

Calcolando gli autovalori nel solito modo si ottiene che questi sono 2, 3, 1 e ad essi corrispondono gli autovettori

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che normalizzati diventano

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi la matrice cercata è

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

infatti:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercise 115 Sia dato il piano di equazione

$$2x + 3y + z = 10$$

Determinare l'equazione parametrica della retta perpendicolare al piano passante per il punto $P = (0, 0, 7)$ ed il loro punto di intersezione.

Il suddetto piano è ortogonale al vettore

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dunque l'equazione parametrica della retta è

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per trovare il punto di intersezione, basta sostituire il generico punto della retta nell'equazione del piano

$$2(2t) + 3(3t) + (7 + t) = 10$$

e determinare il valore di t per cui l'equazione è soddisfatta: si ottiene $t = \frac{3}{14}$

Dunque tale punto è

$$P\left(\frac{3}{14}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + \frac{3}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{9}{14} \\ \frac{101}{14} \end{bmatrix}.$$

Exercise 116 $\diamond$ Si ricorda che l'insieme $C^1[0, 1]$ delle funzioni aventi derivata continua sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale (ogni vettore dello spazio è una funzione). Si consideri l'insieme $V = \{f \in C^1[0, 1], f(0) = 0, f(1) = 0\}$.

1) Si dimostri che V è anch'esso uno spazio vettoriale (in effetti è un sottospazio di $C^1[0, 1]$).

R: Se $f(0) = 0, g(0) = 0$ allora $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$. Ragionando in questo modo si vede facilmente che la somma di due funzioni in V appartiene ancora a V . Analogamente, se $f(0) = 0$, allora $\lambda f(0) = \lambda 0 = 0$ da cui si ha che se $f \in V$ allora $\lambda f \in V$. Con questo si vede che V soddisfa le proprietà richieste ad uno spazio vettoriale.

2) Si dimostri che i seguenti due elementi di V : $v_1 = x(x - 1), v_2 = x(x - 1)(x - \frac{1}{2})$ sono linearmente indipendenti.

R: Si deve dimostrare che non esiste a tale che

$$x(x - 1) = ax(x - 1)(x - \frac{1}{2})$$

essendo quest'ultima una identità fra funzioni deve valere per tutti gli $x \in [0, 1]$. Supponiamo $x \neq 0, x \neq 1$. Dividendo per $x(x - 1)$ si ha

$$\forall x \in (0, 1) \quad 1 = a(x - \frac{1}{2})$$

che è impossibile, in quanto il secondo membro si annulla in $x = \frac{1}{2}$.

3) Si dimostri che i seguenti tre elementi di V : $v_1 = x(x - 1), v_2 = x(x - 1)(x - \frac{1}{2}), v_3 = x(x - 1)(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ sono linearmente indipendenti.

R: Se v_1, v_2, v_3 fossero linearmente dipendenti dal punto precedente si avrebbe che esistono $b, a \in \mathbf{R}$, non tutti nulli, tali che $v_3 = av_1 + bv_2$ cioè

$$ax(x - 1) + bx(x - 1)(x - \frac{1}{2}) = x(x - 1)(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$$

Supponiamo $x \neq 0, x \neq 1$. Dividendo per $x(x - 1)$ si ha

$$a + b(x - \frac{1}{2}) = (x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$$

ponendo $x = \frac{1}{2}$ si ottiene $a = 0$. A questo punto si pone $x = \frac{1}{3}$ e si ottiene $b = 0$. Contraddicendo l'ipotesi che era stata fatta.

4) Può essere trovato in V un insieme infinito di vettori linearmente indipendenti?

R: Ad esempio ragionando come sopra si ottiene che l'insieme formato dai vettori $v_1 = x(x - 1), v_2 = x(x - 1)(x - \frac{1}{2}), v_3 = x(x - 1)(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3}), \dots, v_n = x(x - 1)(x - \frac{1}{2}) \dots (x - \frac{1}{n})$

è per ogni n un insieme indipendente. L'insieme $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots\}$ è quindi infinito e linearmente indipendente.

5) Si dimostri che se $f, g \in V$ allora $\int_0^1 f'(x)g(x) dx = - \int_0^1 f(x)g'(x) dx$.

Se $f, g \in V$ allora $\int_0^1 (f(x)g(x))' dx = f(1)g(1) - f(0)g(0) = 0 - 0 = 0$, ma allora $0 = \int_0^1 (f(x)g(x))' dx = \int_0^1 f'(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g'(x) dx$.

Da cui $\int_0^1 f'(x)g(x) dx = - \int_0^1 f(x)g'(x) dx$. Lo stesso risultato si ottiene anche utilizzando direttamente la formula di integrazione per parti.

Exercise 117 $\diamond$ Determinare per quali valori di t la seguente matrice è invertibile

$$A = \begin{bmatrix} 1-t^2 & t & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5t^2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

R: $\det A = -2 + 2t^2 - t$ quindi la matrice è invertibile se $-2 + 2t^2 - t \neq 0$,
cioè per $t \neq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}$ e $t \neq \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}$

2-Calcolare la matrice inversa di A per $t = 0$.

R: Per $t = 0$ la matrice è a blocchi, quindi è sufficiente invertire le sottomat-

trici $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, da questo si ottiene $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = :$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3-Sempre per $t = 0$, risolvere il sistema

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\text{R: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ d \\ -c \end{bmatrix}$$

Exercise 118 Determinare per quali valori di t la seguente matrice è invertibile.

$$A = \begin{bmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ t^2 & 2 & t \end{bmatrix}$$

R: Poichè $\det(A) = 2 - 2t - 2t^2$ la matrice risulta invertibile se $2 - 2t - 2t^2 \neq 0$,
ovvero per $t \neq \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$

2-Calcolare la matrice inversa di A per $t = -1$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3-Sempre per $t = -1$, risolvere il sistema

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ -\frac{1}{2}a-b+c \\ -b \end{bmatrix}$$

Example 119 $\diamond$ Si consideri la seguente matrice dipendente da un parametro

$$A_t = \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 1+t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- determinare i valori per cui A_t è invertibile.
 $\det(A_t) = (1-t)(1+t)$, quindi la matrice è invertibile per ogni $t \neq \pm 1$.
- determinare l'inversa di A_t , per $t \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- * determinare per quali valori di t la matrice è diagonalizzabile.

Per ogni t gli autovalori sono $1-t, 1+t, 1$. Per $t \neq 0$ questi numeri sono diversi, quindi siccome sappiamo che matrici che hanno autovalori diversi sono diagonalizzabili si ha che A_t è diagonalizzabile. Per $t = 0$ invece la matrice non è diagonalizzabile. Infatti in questo caso si ha il

solo autovalore 1, con molteplicità algebrica 3 e $A_0 - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

quindi, siccome questa matrice ha rango 2 la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 sarà 1 (le molteplicità sono diverse e quindi la matrice non si diagonalizza).

Exercise 120 Si consideri lo spazio vettoriale $V \subset C^\infty(\mathbf{R})$ generato da $e_1 = \cos 2x$ ed $e_2 = \sin 2x$ e l'operatore

$$Lf = Df + f$$

- dimostrare che e_1 ed e_2 formano una base per V

è sufficiente verificare che e_1 ed e_2 sono linearmente indipendenti. Certamente non esiste un numero λ tale che

$$\cos 2x = \lambda \sin 2x$$

e dunque si ha l'indipendenza lineare.

- dimostrare che $L : C^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R})$ è un operatore lineare

Si ha che

$$\begin{aligned}L(f+g) &= Df + f + Dg + g = Lf + Lg \\L(\lambda f) &= \lambda Df + \lambda f = \lambda Lf\end{aligned}$$

per cui L è lineare.

- *determinare la matrice A associata ad L rispetto alla base e_1 ed e_2*

Si ha che

$$\begin{aligned}Le_1 &= -2 \sin 2x + \cos 2x = e_1 - 2e_2 \\Le_2 &= 2 \cos 2x + \sin 2x = 2e_1 + e_2\end{aligned}$$

dunque la matrice A associata ad L è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- *determinare se $L : V \rightarrow V$ è invertibile ed in caso positivo determinare A^{-1}*

SI' in quanto, $\det A = 1 + 4 = 5 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- *determinare gli autovalori di L*

gli autovalori sono $1 + 2i$ e $1 - 2i$

- *risolvere la seguente equazione*

$$\begin{aligned}u &\in V \\Lu &= 5 \cos 2x + 25 \sin 2x\end{aligned}$$

Tale equazione è equivalente al sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

per cui

$$x = A^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ed

$$u = -9 \cos 2x + 7 \sin 2x.$$

2.5 Funzioni di piu variabili

L'argomento e' molto vasto e qui ci dedicheremo ad alcuni esempi di calcolo si massimi e minimi in due variabili, dove la funzione viene ristretta ad un dominio D (con bordo ∂D), sottoinsieme del piano. Si considereranno sia domini limitati che illimitati.

Si ricorda che in questi casi il procedimento è sempre quello di

1) trovare i punti critici all' interno del dominio ponendo $\nabla f = 0$, eventualmente studiare di che punti critici si tratta utilizzando l'Hessiano

2) trovare i punti critici della funzione ristretta al bordo $f|_{\partial D}$ (parametrizzando il bordo e quindi ottenendo una funzione di una variabile) e confrontare i valori assunti dalla funzione in questi punti con quelli che si hanno nei punti critici all interno.

3) qualora il bordo non sia una curva ovunque differenziabile (ad es quando il bordo e' un poligono) si dovrà parametrizzarlo "a pezzi" e tenere conto anche dei valori che assume la funzione al bordo di questi pezzi (i vertici del poligono).

4) se il dominio e' illimitato si dovrà opportunamente tenere conto del comportamento asintotico della funzione nelle "direzioni" in cui il dominio è illimitato.

Exercise 121 $\diamond$ Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x, y) = -x^2 + xy + x + 4y$$

sia $D = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : y \leq x^2 \}$, si determinino il sup e l' inf dei valori assunti dalla funzione sull insieme D .

R: $\inf(f|_D) = -\infty$ perche se si considera la retta $y = 0$, su questa la funzione vale $f|_{y=0} = -x^2 + x$ e quindi va a $-\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

$\sup(f|_D) = \infty$ perche se si considera il comportamento della funzione sul bordo: $f|_{\partial D} = f(t, t^2) = -t^2 + t^3 + t + 4t^2$ questa va a ∞ per $t \rightarrow \infty$.

Exercise 122 Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x, y) = -x^2 + x - 4y$$

sia $D = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : y \geq |x| \}$, si determinino il sup e l' inf dei valori assunti dalla funzione sull insieme D .

R: Lungo la retta $y = 0$, la funzione vale $f|_{y=0} = -x^2 + x$ e quindi va a $-\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi $\inf(f|_D) = -\infty$.

Consideriamo adesso il sup. All' interno del dominio (dove la y puo andare solo verso $+\infty$) non ci sono direzioni su cui la funzione possa andare ad ∞ .

Infatti, in D si ha $y \geq 0$ e in D si ha $f(x, y) \leq -x^2 + x$, che non puo andare a $+\infty$. Consideriamo il comportamento della funzione all interno del dominio.

$\nabla f = \begin{pmatrix} -2x + 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ quindi non ci sono punti critici nell' interno del dominio.

Consideriamo il comportamento della funzione sul bordo: $f|_{\partial D} = f(t, |t|) = \begin{cases} f(t, -t) \text{ se } t < 0 \\ f(t, t) \text{ se } t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -t^2 + 5t \text{ se } t < 0 \\ -t^2 - 3t \text{ se } t \geq 0 \end{cases}$ per $t \rightarrow \pm\infty$ la funzione va ancora a $-\infty$ ma per $t < 0$ questa assume un massimo positivo, infatti $-t^2 + 5t$ ha massimo in $t = \frac{5}{2}$ e qui $f(t, |t|) = \frac{25}{4}$. D'altra parte per $t > 0$ si ha $f(t, |t|) = -t^2 - 3t$ che è sempre decrescente, quindi su questa semiretta il massimo valore si raggiunge in 0, con $f(0, 0) = 0$.

Quindi ho trovato che $\sup(f|_D) = \frac{25}{4}$.

Exercise 123 Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x, y) = x^2$$

sia $D = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : y^2 + x^2 \leq 1 \}$, si determinino il sup e l'inf dei valori assunti dalla funzione sull'insieme D .

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$, si annulla sulla retta $x = 0$ e lì la funzione assume il valore $f = 0$. $f|_{\partial D} = f(\cos t, \sin t) = (\cos t)^2$, così $\max(f|_D) = 1, \min(f|_D) = 0$.

Exercise 124 Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 10y + 1$$

sia $D = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : y \geq \sqrt{|x|} \}$, si determinino il sup e l'inf dei valori assunti dalla funzione sull'insieme D .

Si vede facilmente che la funzione va verso $-\infty$ quando ci si allontana dall'origine. Quindi $\inf(f|_D) = -\infty$. Il sup quindi sarà finito.

Cerchiamo punti critici all'interno del dominio: $\nabla f = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y + 10 \end{pmatrix}$ così si

ha un punto critico in $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = 26$.

Consideriamo adesso il comportamento della funzione al bordo del dominio. Per $x \geq 0$ la funzione sul bordo assume i valori $f(t, \sqrt{t}) = -t^2 - t + 10\sqrt{t} + 1$. $\frac{d}{dt}(-t^2 - t + 10\sqrt{t} + 1) = \frac{5}{\sqrt{t}} - 2t - 1 = \frac{5 - 2t\sqrt{t} - \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$. Per risolvere $\frac{5 - 2t\sqrt{t} - \sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 0$ dobbiamo risolvere $5 - 2t\sqrt{t} - \sqrt{t} = 0$. Per questo poniamo $T = \sqrt{t}$ e quindi si ha da risolvere $5 - 2T^3 - T = 0$. Le soluzioni di questa soddisferanno ovviamente $T < 2$, quindi $t < 4$.

Notiamo però che per $t < 4$ si ha $f(t, \sqrt{t}) = -t^2 - t + 10\sqrt{t} + 1 \leq 21$. Analogamente si fa per $t < 0$ (la funzione è simmetrica). Quindi sul bordo non si possono raggiungere valori maggiori di 26 che quindi sarà il massimo.

Per curiosità calcoliamo l'hessiano nel punto critico (che a questo punto sappiamo già essere un massimo). $Hf\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, quindi il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ è un massimo locale.

Exercise 125 Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$$

Si determini $\inf(f)$, $\sup(f)$, i punti critici e la loro natura (massimo, minimo, sella).

Si determini

$$\max_{x \in K}(f), \min_{x \in K}(f)$$

ove

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$$

R: Restringendoci alla retta $y = 0$ si vede facilmente che $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$. Poiché $\nabla(x^3 + 2xy + y^2) = (3x^2 + 2y, 2x + 2y)$; i punti critici di f sono $(0, 0)$ e $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

L'Hessiano è dato da

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det H(x, y) = 12x - 4$; $\det H(0, 0) = -4$; dunque il punto $(0, 0)$ è di sella. $\det H(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = -8$; dunque, anche $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ è un punto di sella.

Poichè, non ci sono punti di massimo e minimo interni a K essi dovranno trovarsi sulla frontiera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ove

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; y = 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0; 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; x + y = 1\}$$

$$\min_{(x, y) \in \Gamma_1} f(x, 0) = 0; \max_{(x, y) \in \Gamma_1} f(x, 0) = 1$$

$$\min_{(x, y) \in \Gamma_2} f(0, y) = 0; \max_{(x, y) \in \Gamma_2} f(0, y) = 1$$

$$\min_{(x, y) \in \Gamma_3} f(x, y) = \min_{x \in [0, 1]} f(x, 1 - x) = 0; \max_{(x, y) \in \Gamma_3} f(x, y) = \min_{x \in [0, 1]} f(x, 1 - x) = 1$$

La funzione $g(x) = f(x, 1 - x)$ ha la forma $x^3 - x^2 + 1$; i possibili punti di massimo o di minimo sono i punti dove si annulla la derivata o i punti di frontiera, ovvero $x = 0, 1, \frac{2}{3}$. E si ha

$$g(0) = f(0, 1) = 1$$

$$g(1) = f(1, 0) = 1$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{23}{27}$$

Concludendo, il massimo cercato è 1 ed il minimo è 0.

Exercise 126 $\diamond$ Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x, y) = x^3 + 2xy + y^3$$

Si determini $\inf(f)$, $\sup(f)$, i punti critici e la loro natura (massimo, minimo, sella).

R: Poiché $\nabla (x^3 + 2xy + y^3) = (3x^2 + 2y, 2x + 3y^2)$, le soluzioni reali del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

sono $\{y = 0, x = 0\}, \{y = -\frac{2}{3}, x = -\frac{2}{3}\}$.

L' Hessiano è dato da $H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 6y \end{bmatrix}$; poichè $H(0, 0) = -4 < 0$, risulta che $(0, 0)$ è un punto di sella

$H(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 12 > 0$ e $-4 < 0$, risulta che $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ è un punto di massimo.

o Si determini $\max_{x \in K}(f)$ e $\min_{x \in K}(f)$, ove

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}.$$

R: Poichè, non ci sono punti di massimo e minimo interni a K essi dovranno trovarsi sulla frontiera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ove

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; y = 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0; 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; x + y = 1\}$$

$$\min_{(x, y) \in \Gamma_1} f(x, 0) = 0; \quad \max_{(x, y) \in \Gamma_1} f(x, 0) = 1$$

$$\min_{(x, y) \in \Gamma_2} f(0, y) = 0; \quad \max_{(x, y) \in \Gamma_2} f(0, y) = 1$$

$$\begin{aligned} \min_{(x, y) \in \Gamma_3} f(x, y) &= \min_{x \in [0, 1]} f(x, 1 - x) = \min_{x \in [0, 1]} x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}; \\ \max_{(x, y) \in \Gamma_3} f(x, y) &= \min_{x \in [0, 1]} f(x, 1 - x) = 1 \end{aligned}$$

Concludendo, il massimo è 1 ed il minimo è 0.

Example 127 Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x, y) = x^3 - 2xy + y^3$$

Si determini $\inf(f)$, $\sup(f)$, i punti critici e la loro natura (massimo, minimo, sella).

R: Il gradiente è $\nabla(x^3 - 2xy + y^3) = (3x^2 - 2y, -2x + 3y^2)$, le soluzioni reali del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ -2x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

sono $\{y = 0, x = 0\}, \{y = \frac{2}{3}, x = \frac{2}{3}\}$. Inoltre l' Hessiano è dato da $H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 6y \end{bmatrix}$; poichè $H(0, 0) = -4 < 0$, risulta che $(0, 0)$ è un punto di sella

$H(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 12 > 0$ e $4 > 0$, risulta che $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ è un punto di minimo.

o Si determini $\max_{x \in K}(f), \min_{x \in K}(f)$ ove

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}.$$

R: Poichè, non ci sono punti di massimo e minimo interni a K essi dovranno trovarsi sulla frontiera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ove

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; y = 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0; 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; x + y = 1\}$$

$$\min_{(x,y) \in \Gamma_1} f(x, 0) = 0; \max_{(x,y) \in \Gamma_1} f(x, 0) = 1$$

$$\min_{(x,y) \in \Gamma_2} f(0, y) = 0; \max_{(x,y) \in \Gamma_2} f(0, y) = 1$$

$$\begin{aligned} \min_{(x,y) \in \Gamma_3} f(x, y) &= \min_{x \in [0,1]} f(x, 1-x) = \min_{x \in [0,1]} 5x^2 - 5x + 1 = -\frac{1}{4}; \\ \max_{(x,y) \in \Gamma_3} f(x, y) &= \min_{x \in [0,1]} f(x, 1-x) = 1 \end{aligned}$$

Concludendo, il massimo è 1 ed il minimo è $-\frac{1}{4}$.

Exercise 128 Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la seguente funzione

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - y^3$$

Si determini $\inf(f), \sup(f)$, i punti critici e la loro natura (massimo, minimo, sella).

R: $\nabla(x^3 + 2xy - y^3) = (3x^2 + 2y, 2x - 3y^2)$, le soluzioni reali del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2x - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

sono $\{x = 0, y = 0\}, \{x = \frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}\}$, l' Hessiano è dato da $H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 2 \\ 2 & -6y \end{bmatrix}$;

poichè $H(0, 0) = -4 < 0$, risulta che $(0, 0)$ è un punto di sella

$H(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 12 > 0$ e $4 > 0$, risulta che $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ è un punto di minimo.

o Si determini $\max_{x \in K}(f)$ e $\min_{x \in K}(f)$ ove

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}.$$

R: Poichè, non ci sono punti di massimo e minimo interni a K essi dovranno trovarsi sulla frontiera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ove

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; y = 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0; 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; x + y = 1\}$$

$$\min_{(x,y) \in \Gamma_1} f(x, 0) = 0; \quad \max_{(x,y) \in \Gamma_1} f(x, 0) = 1$$

$$\max_{(x,y) \in \Gamma_2} f(0, y) = 0; \quad \min_{(x,y) \in \Gamma_2} f(0, y) = -1$$

$$\min_{(x,y) \in \Gamma_3} f(x, y) = \min_{x \in [0,1]} f(x, 1-x) = \min_{x \in [0,1]} 2x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = -1;$$

$$\max_{(x,y) \in \Gamma_3} f(x, y) = \min_{x \in [0,1]} f(x, 1-x) = 1.$$

Concludendo, il massimo è 1 ed il minimo è -1.

2.6 Serie

Il metodo migliore per studiare la convergenza di una serie è quasi sempre quello di confrontarla con una serie di cui si conosce il carattere, ad es, nel seguente esercizio

Exercise 129 $\diamond$ Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$$

R: Usiamo il metodo degli infinitesimi (confrontando la serie con $\frac{1}{n^2}$)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \left(\frac{1}{n} \right)} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{1 + \tan^2 \left(\frac{1}{n} \right)} - n^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{1 + \tan^2 \left(\frac{1}{n} \right)} - n^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 \frac{\tan^2 \frac{1}{n}}{1 + \tan^2 \frac{1}{n}} = 1\end{aligned}$$

Dunque la serie converge.

Exercise 130 Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sin(an)+1} \right|$ converge?

R: Per tutti i valori di a la serie è a termini positivi ma non è infinitesima , quindi essa diverge.

Exercise 131 Per quali valori di a la seguente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sin(n)+an^2} \right|$ converge?

R: La serie converge per $a \neq 0$.

Exercise 132 Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cos \left(\frac{1}{n} \right)} - 1$$

R: Usiamo il metodo degli infinitesimi (confrontando la serie con $\frac{1}{n^2}$)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{\cos \left(\frac{1}{n} \right)} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\cos \left(\frac{1}{n} \right)} - n^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 \frac{-1 + \cos \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dunque la serie converge.

Exercise 133 $\diamond$ Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n^2} \frac{\sin x}{x} dx$$

Poichè $\int_0^{1/n^2} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{n^2}$ la serie converge.

Exercise 134 $\diamond$ Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n^2} e^{-x^2} dx$$

Poichè $\int_0^{1/n^2} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{1/n^2} dx = \frac{1}{n^2}$ la serie converge.

Exercise 135 Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ove } a_n = n \int_0^{1/n^3} \frac{\sin x}{x} dx$$

Poichè $a_n = n \int_0^{1/n^3} \frac{\sin x}{x} dx \leq n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ la serie converge.

Exercise 136 Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ove } a_n = \frac{1}{n^2} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sin x}{x} dx$$

Poichè $a_n = \frac{1}{n^2} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{n^2} \sqrt{n} = \frac{1}{n^{3/2}}$ la serie converge.

Exercise 137 Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ove } a_n = \frac{1}{n^3} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx$$

Poichè $|a_n| = \left| \frac{1}{n^3} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{n^3} \int_0^n 1 dx \leq \frac{1}{n^2}$ la serie converge.

Example 138 Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \arctan^2\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$$

R: Usiamo il metodo degli infinitesimi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{1 + \arctan^2\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 \frac{\arctan^2 \frac{1}{n}}{1 + \arctan^2 \frac{1}{n}} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \arctan^2 \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \arctan^2 \frac{1}{n}} = -1 \end{aligned}$$

Dunque la serie converge.

Exercise 139 Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$$

R: Usiamo il metodo degli infinitesimi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{1 + \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{1 + \sin^2 \frac{1}{n}} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sin^2 \frac{1}{n}} = -1 \end{aligned}$$

Dunque la serie converge.

Exercise 140 Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$$

R: Usiamo il metodo degli infinitesimi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{1 + \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{1 + \sin^2 \frac{1}{n}} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sin^2 \frac{1}{n}} = -1 \end{aligned}$$

Dunque la serie converge.

Exercise 141 Si determini il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{4}(n-1) - \int_1^n \frac{\arctan(t)}{t} dt}{1+n^2}$$

R: Se $f(x) = \frac{\pi}{4}(x-1) - \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt$ per x grandi si ha $f(x) > \frac{\pi}{8}x - (\pi/2)\log(x)$; dunque $\frac{f(n)}{1+n^2} > \frac{\frac{\pi}{8}n - c \log(x)}{1+n^2}$; ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{8}n - c \log x}{1+n^2}$ diverge perche $\frac{\frac{\pi}{8}n - c \log x}{1+n^2} = \frac{\frac{\pi}{8}n}{1+n^2} - \frac{c \log x}{1+n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{8}n}{1+n^2} = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c \log x}{1+n^2} < \infty$ e quindi la serie di partenza diverge.

Exercise 142 $\diamond$ Si determini il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \sin n)^n + n^2}{3^n - n^2}$$

R: Per n grandi si ha che $\left| \frac{(1+\sin n)^n + n^2}{2^n - n^2} \right| < 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{-n}$, dunque la serie converge.

Exercise 143 (DIFFICILISSIMO) Si determini il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \sin n)^n}{2^n}$$

? ? ?

Exercise 144 $\diamond$ Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ove } a_n = \frac{1}{n} \int_0^{1/n} \frac{\log(1+x)}{x} dx$$

Poichè $|a_n| = \left| \frac{1}{n} \int_0^{1/n} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{1/n} 1 dx \leq \frac{1}{n^2}$ la serie converge.

Exercise 145 Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ove } a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sin x}{x} dx$$

Poichè, per n sufficientemente grande, $|a_n| = \left| \int_0^{1/n} \frac{\sin x}{x} dx \right| \geq \int_0^{1/n} \frac{1}{2} dx \geq \frac{1}{2n}$ la serie diverge.

Exercise 146 Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ove } a_n = \int_0^{1/n} \frac{2 \sin x}{x} dx$$

Poichè, per n sufficientemente grande, $|a_n| = \left| \int_0^{1/n} \frac{2 \sin x}{x} dx \right| \geq \int_0^{1/n} dx \geq \frac{1}{n}$ la serie diverge.

Exercise 147 Si determini il carattere delle seguenti serie (la prima serie è riservata agli studenti più bravi).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \cos n)^n + n^3}{4^n - n + 1}$$

ove $f(x) = e^x - \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

R: $f(n) = e^n - \int_1^n \frac{e^t}{t} dt > \frac{1}{2} e^n$ per n abbastanza grande dunque $\frac{1}{f(n)} < 2e^{-n}$ e quindi la serie converge. Per n grande

$$\left| \frac{(1 + \cos n)^n + n^3}{4^n - n + 1} \right| \leq \frac{2^n + n^3}{4^n} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{n^3}{4^n}$$

Anche questa serie converge.

Exercise 148 $\diamond$ Si considerino le seguenti serie e se ne studi il carattere i) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(\frac{1}{n})$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(\frac{1}{n^2+1})$;

R: La prima serie diverge, la seconda converge (si usi lo sviluppo di Taylor di $\tan$).

3 Complementi di teoria e metodi pratici per le equazioni differenziali

Aggiungiamo qui alcuni complementi riguardanti le equazioni differenziali. Si tratta di argomenti che a volte non vengono spiegati nei libri rivolti agli studenti di ingegneria del primo anno, ma che noi riteniamo utili ed istruttivi.

3.1 Teoremi di esistenza ed unicità

Enunciamo qui alcuni risultati generali di esistenza e unicità **locale** per le equazioni differenziali. Tali risultati ci assicurano che sotto ipotesi molto generali un problema di Cauchy ha una soluzione unica almeno in un piccolo intorno della condizione iniziale (il problema di quanto questa soluzione poi si possa prolungare viene qui solo accennato).

Sia data una funzione

$$f : (a, b) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

e si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

ove $t_0 \in (a, b)$ e $u_0 \in \mathbf{R}^n$ sono assegnati.

Enunciamo senza dimostrazione il seguente teorema che sta alla base di tutta la teoria delle equazioni differenziali ordinarie:

Theorem 149 (di Peano o di esistenza locale) *Se $f(t, u)$ è continua, esiste un intervallo*

$$(a_0, b_0) \subseteq (a, b)$$

ed una funzione

$$u : (a_0, b_0) \rightarrow \mathbf{R}^n$$

soluzione del problema (1).

Remark 150 (Prolungamento delle soluzioni) *Supponiamo che f sia definita per ogni $u \in \mathbf{R}^n$ e per ogni $t \in (a, b)$. Il teorema 149 garantisce l'esistenza di una soluzione del problema (1) in un intervallo $(a_0, b_0) \subseteq (a, b)$; dunque naturale studiare condizioni sufficienti ad assicurare che si abbia $(a_0, b_0) = (a, b)$. Ovvero è naturale domandarsi se la soluzione che sappiamo esistere nel piccolo intervallo*

(a_0, b_0) si possa prolungare in tutto l'intervallo (a, b) (dove la f è definita). Se la soluzione si prolunga solo fino a $b_1 < b$ ciò che capita è il seguente fenomeno:

$$\lim_{t \rightarrow b_1^-} |u(t)| = +\infty^4$$

Analogamente, se "all indietro" la soluzione si prolunga solo fino ad $a_1 > a$

$$\lim_{t \rightarrow a_1^+} |u(t)| = +\infty$$

Pertanto per assicurarci che $(a_1, b_1) = (a, b)$, basta verificare che la soluzione $u(t)$ si mantiene limitata.

Si consideri adesso il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}) \\ u' = \sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

In virtù del teorema 1, questo problema ammette certamente una soluzione (infatti $u(t) = 0$ è una soluzione) comunque un più attento esame mostra che esistono altre soluzioni. Infatti scelto arbitrariamente un numero $\lambda \geq 0$, si ha che

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq \lambda \\ \frac{1}{2}(t - \lambda)^2 & \text{per } t \geq \lambda \end{cases}$$

è soluzione del problema (2). Dunque questo problema ha infinite soluzioni.

Il seguente teorema fornisce una condizione *sufficiente* affinché questo fenomeno non capiti.

Theorem 151 (di Unicità locale) Supponiamo che la funzione $\frac{\partial f}{\partial u}(t, u)$ sia definita e continua; allora la soluzione del problema (1) (che esiste per il Teorema 149) è unica.

L'ipotesi del teorema precedente è violata per il problema (2). Infatti in questo caso si ha che

$$F(t, u) = \sqrt{|u|}; \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\sqrt{|u|}}{u}$$

quindi $\frac{\partial F}{\partial u}$ non è definita per il valore $u = 0$.

⁴Se così non fosse si potrebbe usare il teorema 149 per prolungare la soluzione ulteriormente.

3.1.1 Qualche esercizio

Determinare una soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = -|u| \\ u(1) = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} u' = \max(2u, u^2) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \max(t, u) \\ u(-1) = 0 \end{cases}$$

3.2 Equazioni a variabili separabili

In generale, la determinazione dell'insieme di tutte le soluzioni di una equazione differenziale (o anche la risoluzione del problema di Cauchy), è un compito molto arduo ed il più delle volte impossibile nel senso che tali soluzioni non possono essere scritte esplicitamente.

Comunque, in alcuni casi molto semplici si può tentare qualcosa. Uno di questi casi è quello delle equazioni del primo ordine a variabili separabili, cioè di equazioni che possono essere scritte nella seguente forma:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)}. \quad (3)$$

Consideriamo il dato iniziale

$$x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

e tentiamo di risolvere il problema di Cauchy (3), (4).

Dalla (3) si ha:

$$g(x) \frac{dx}{dt} = f(t)$$

Integrando i due membri tra t_0 ed t si ottiene

$$\int_{t_0}^t g(x(s)) x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

Operando nel primo integrale la sostituzione $\tau = x(t)$, si ha $x'(s) ds = d\tau$, per cui

$$\int_{x_0}^x g(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(t) dt \quad (5)$$

e quindi

$$G(x) = F(t) - F(t_0) + G(x_0)$$

ove F e G sono due primitive di f e g rispettivamente.

Se in un opportuno intervallo G è invertibile, in tale intervallo, si ottiene una soluzione di (3),(4):

$$x(t) = G^{-1} [F(t) - F(t_0) + G(x_0)]$$

In genere si agisce formalmente e si riscrive la (3) come "forma differenziale"

$$g(x)dx = f(t)dt$$

da cui integrando si ottiene una espressione del tipo

$$G(x) = F(t) + c$$

ove c è una costante che può essere determinata dalle condizioni iniziali. Quindi si determina la x come in una usuale equazione numerica.

Vediamo un esempio. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = tx^2 \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

In questo caso si ha

$$\frac{dx}{x^2} = t dt$$

da cui integrando si ottiene

$$-\frac{1}{x} = t + c$$

ove la costante di integrazione può essere determinata dalla condizione iniziale, ovvero ponendo

$$t = 1 \quad \text{ed} \quad x = 2$$

da cui segue che

$$-\frac{1}{2} = 1 + c$$

ovvero $c = -\frac{3}{2}$, da cui

$$-\frac{1}{x} = t - \frac{3}{2}$$

e quindi

$$x = \frac{2}{3 - 2t^2}$$

Si osservi che questa soluzione risulta definita per

$$t \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

e non può essere prolungata in modo sensato al di fuori di tale intervallo.

UN ESEMPIO NOTEVOLE: l'equazione logistica.

L'equazione logistica

$$\frac{dx}{dt} = k_0 \left(1 - \frac{x}{M}\right) x$$

rappresenta un semplice modello di crescita di una popolazione con tasso di crescita

$$k(x) = k_0 \left(1 - \frac{x}{M}\right)$$

che dipende dalla popolazione stessa x . Se $x \sim 0$ la crescita ha un valore massimo k_0 , per cui, essendo $k(x)$ una funzione continua di x si ha che $k(0) = k_0$. Ma si suppone che l'ambiente non possa sopportare una popolazione superiore a M . Dunque se $x > M$, la popolazione decresce ovvero il tasso di crescita $k(x)$ è negativo. In particolare $k(M) = 0$. Gli altri valori di $k(x)$ si ottengono per interpolazione lineare. L'equazione logistica è a variabili separabili per cui si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{M}{(M-x)x} dx &= k_0 dt \\ \log \left| \frac{x}{M-x} \right| &= k_0 t + c. \end{aligned}$$

Eseguendo i calcoli, si ottiene

$$x(t) = \frac{M}{1 + cMe^{-k_0 t}}$$

ove c è la costante arbitraria che dipenda dal dato iniziale. Per esempio, ponendo

$$x(0) = x_0$$

si ottiene

$$c = \frac{M - x_0}{Mx_0}$$

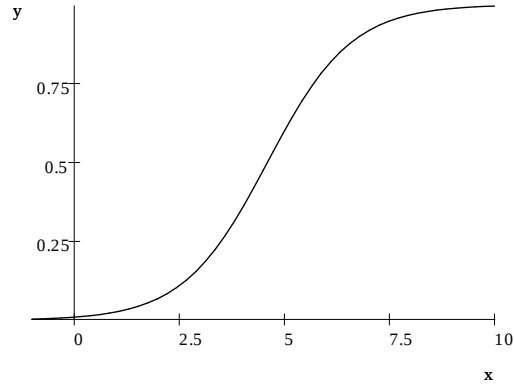
per cui,

$$x(t) = \frac{M}{1 + \left(\frac{M-x_0}{x_0}\right) e^{-k_0 t}} = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0) e^{-k_0 t}}$$

Per esempio, scegliendo $M = k_0 = 1$ e $x_0 = 0.01$ si ottiene la soluzione

$$x(t) = \frac{1}{1 + 99e^{-t}}$$

il cui grafico, che è la tipica curva ad "S", è illustrato in figura:



3.2.1 Qualche esercizio

Si risolvano le seguenti equazioni:

$$x' = 5x^2; \quad x' = \frac{x+1}{t-1}; \quad x' + \frac{1}{x} = 0.$$

3.3 Equazioni lineari di ordine superiore

Consideriamo la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^n(a, b) \\ Lu = 0 \end{cases} \quad (6)$$

ove

$$L : \mathcal{C}^n(a, b) \rightarrow \mathcal{C}^0(a, b)$$

è un operatore *differenziale* definito nel seguente modo:

$$L = D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \dots + a_1(t)D + a_0(t)$$

ove le $a_j(t)$ sono funzioni continue di t definite in (a, b) .

Il problema (6) è un problema lineare omogeneo tra gli spazi vettoriali $V = \mathcal{C}^n(a, b)$ e $Z = \mathcal{C}^0(a, b)$. Dunque si può applicare la usuale teoria dei sistemi lineari. Pertanto l'insieme W di tutte le soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^1((a, b), \mathbf{R}^n)$.

In maniera più esplicita, l'equazione (6) può essere scritta nel seguente modo:

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = 0 \quad (7)$$

Enunciamo, senza dimostrazione il seguente teorema:

Theorem 152 *L'insieme W delle soluzioni della (7) è uno spazio vettoriale di dimensione n .*

Per avere un'unica soluzione si devono imporre all'equazione (7) le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} u(t_0) = c_0 \\ u'(t_0) = c_1 \\ u''(t_0) = c_2 \\ \dots\dots\dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1} \end{cases} \quad (8)$$

Consideriamo adesso l'equazione non omogenea

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^n(a, b) \\ Lu = f(t) \end{cases} \quad (9)$$

Sappiamo, per la teoria astratta delle equazioni lineari, che l'insieme di tutte le soluzioni si ottiene sommando una soluzione particolare $\bar{x}(t)$ di (9) con l'insieme delle soluzioni di (6). Pertanto la "soluzione generale" della (9) ha la forma

$$x(t) = \bar{x}(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t).$$

Comunque nella maggioranza dei casi concreti le soluzioni di questi problemi non si possono scrivere come funzioni elementari (a meno che i coefficienti non siano costanti). Una eccezione a questo fatto è costituita dall'equazioni di primo grado ove la soluzione può sempre essere trovata mediante operazioni di integrazione, e se abbiamo la fortuna di ottenere funzioni integrabili elementarmente, si ottiene la soluzione esplicita di queste equazioni.

Consideriamo quindi la seguente equazione di primo grado:

$$\begin{cases} x \in \mathcal{C}^1(a, b) \\ x' = a(t)x + f(t) \end{cases} \quad (10)$$

L'insieme W delle soluzioni dell'equazione omogenea associata, si può trovare mediante il metodo di separazione delle variabili e si ha

$$W = \{c e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \mid c \in \mathbf{R}\}$$

ove $t_0 \in (a, b)$ può essere scelto arbitrariamente.

Per determinare una soluzione dell'equazione non omogenea, si pone

$$\bar{x}(t) = c(t) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

e si sostituisce questa espressione nell'equazione per cui si ottiene

$$c'(t) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + c(t) a(t) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = a(t) w(t) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + f(t)$$

da cui

$$c'(t) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = f(t)$$

$$c'(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} \cdot f(t)$$

$$c(t) = \int_{t_0}^t \left(e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} \cdot f(\tau) \right) d\tau.$$

Concludendo una soluzione particolare della (10) è data da

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \cdot \int_{t_0}^t \left(e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} \cdot f(\tau) \right) d\tau$$

Se all'equazione (10) imponiamo la condizione iniziale

$$x(t) = x_0$$

si ottiene l' unica soluzione del problema di Cauchy nella seguente forma:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left[x_0 + \int_{t_0}^t \left(e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} \cdot f(\tau) \right) d\tau \right]$$

ESEMPIO.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t} \cdot x + t^2 \\ x(1) = 2 \end{cases} \quad (11)$$

L' insieme delle soluzioni dell' equazione omogenea associata è dato da

$$W = \{ct \mid c \in \mathbf{R}\}$$

Dunque la soluzione del problema (11) è data da

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= t \cdot \left[2 + \int_1^t (\tau^{-1} \cdot \tau^2) d\tau \right] \\ &= t \cdot \left[2 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^3. \end{aligned}$$

3.3.1 Qualche esercizio

Si trovi l'integrale generale delle seguenti equazioni

$$x' - 2tx = t$$

$$x' - 3t^{-2}x = t^{-2}$$

$$x' - 4t^{-1}x = t^4$$

3.4 Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Se si considerano equazioni e sistemi di equazioni a coefficienti costanti, la struttura dell'insieme delle soluzioni non cambia. Però in questo caso tali soluzioni possono essere calcolati esplicitamente, almeno nella misura in cui si riescono a calcolare esplicitamente le soluzioni di una equazione algebrica (caso omogeneo) e l'integrale di una funzione elementare (caso non omogeneo).

In questo paragrafo studieremo un metodo per determinare le soluzioni delle equazioni lineari a coefficienti costanti cioè equazioni della seguente forma:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \\ P_n(D)u = 0 \end{cases} \quad (12)$$

ove

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (13)$$

è un polinomio a coefficienti reali o complessi, e quindi

$$P_n(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0 \quad (14)$$

è un operatore differenziale lineare.

Dalla teoria svolta nel paragrafo precedente sappiamo che l'insieme delle soluzioni della (12) è un sottospazio vettoriale W di $\mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Pertanto, per determinare tutte le soluzioni della (12), sarà sufficiente determinare n soluzioni linearmente indipendenti.

Cominciamo con i casi più semplici

$$P(D) = (D - \lambda).$$

In questo caso la (12) si riduce all'equazione della crescita, e dunque una soluzione è data da

$$u(t) = e^{\lambda t} \quad (15)$$

Si osservi che la (15) è una soluzione dell'equazione $(D - \lambda)u = 0$ anche se λ è un numero complesso.

Consideriamo adesso l'equazione

$$P(D) = D^\mu,$$

ove μ è un intero ≥ 2 . In questo caso la nostra equazione si riduce a

$$\frac{d^\mu u}{dt^\mu} = 0$$

Eseguendo μ integrazioni si ha che la soluzione generale ha la forma

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{\mu-1} t^{\mu-1}$$

Il terzo caso è il seguente:

$$P(D) = (D - \lambda)^\mu,$$

ove μ è un intero ≥ 2 . In questo caso si cerca la soluzione della nostra equazione nella forma

$$u(t) = x(t)e^{\lambda t}$$

Poichè

$$\begin{aligned} (D - \lambda)x(t)e^{\lambda t} &= x'(t)e^{\lambda t} + \lambda x(t)e^{\lambda t} - \lambda x(t)e^{\lambda t} \\ &= x'(t)e^{\lambda t} \end{aligned}$$

si ha che

$$(D - \lambda)^\mu x(t)e^{\lambda t} = (D - \lambda)^{\mu-1} x'(t)e^{\lambda t} = \dots = x^{(\mu)}(t)e^{\lambda t}.$$

Dunque, u è soluzione della nostra equazione se

$$x^{(\mu)}(t) = 0$$

Per quanto visto nel caso precedente, questa equazione ha la seguente soluzione generale

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{\mu-1} t^{\mu-1}$$

e quindi

$$u(t) = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{\mu-1} t^{\mu-1}) e^{\lambda t};$$

è la soluzione generale della nostra equazione. Le μ funzioni linearmente indipendenti

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{\mu-1} e^{\lambda t};$$

generano dunque W .

Questi semplici casi ci permettono di trattare il caso generale.

In virtù del teorema fondamentale dell'Algebra il polinomio (13) può essere scomposto nella seguente maniera

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k}$$

ove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono le radici di $P_n(\lambda)$ e $\mu_1, \dots, \mu_k$ sono le loro molteplicità. Allora anche l'operatore differenziale (14), può essere scomposto nel seguente modo:

$$P_n(D) = (D - \lambda_1)^{\mu_1} (D - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (D - \lambda_k)^{\mu_k}$$

Adesso osserviamo che se u è soluzione dell'equazione

$$(D - \lambda_1)^{\mu_1} u = 0$$

allora u è soluzione della (12); infatti

$$P_n(D)u = (D - \lambda_1)^{\mu_1} (D - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (D - \lambda_k)^{\mu_k} u = 0$$

$$\begin{aligned}
&= (D - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (D - \lambda_k)^{\mu_k} (D - \lambda_1)^{\mu_1} u = \\
&= (D - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (D - \lambda_k)^{\mu_k} 0 = 0.
\end{aligned}$$

In generale, affinché una funzione u sia soluzione dell' equazione (12), è sufficiente che sia soluzione dell' equazione

$$(D - \lambda_j)^{\mu_j} u = 0$$

Dunque la (12) ha le seguenti soluzioni linearmente indipendenti:

[illegible]

Queste funzioni generano uno spazio di dimensione

$$\mu_1 + \dots + \mu_k = n$$

e quindi ogni altra soluzione della (12) è una loro combinazione lineare.

Se l'operatore $P_n(D)$ è a coefficienti reali, allora si può trovare una base per W consistente di funzioni in $C^n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Vediamo come. Se λ è una radice complessa del polinomio P_n , allora anche il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}$ lo è; dunque

$$u_1(t) = e^{\lambda t} \quad e \quad u_2(t) = e^{\bar{\lambda} t}$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti della (12). Posto

$$\lambda = a + ib,$$

usando la formuladi Eulero, queste soluzioni si possono scrivere nella forma

$$u_1(t) = e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \quad e \quad u_2(t) = e^{at} (\cos bt - i \sin bt). \quad (17)$$

Posto

$$v_1(t) = \frac{1}{2}u_1(t) + \frac{1}{2}u_2(t) = e^{at} \cos bt \quad (18)$$

e

$$v_2(t) = \frac{1}{\gamma_i} u_1(t) - \frac{1}{\gamma_i} u_2(t) = e^{at} \sin bt \quad (19)$$

risulta che $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono linearmente indipendenti e quindi generano lo stesso spazio lineare generato da $u_1(t)$ e $u_2(t)$ ed inoltre $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono funzioni a valori reali.

Ragionando in maniera analoga ogni coppia di soluzioni (16) del tipo (17) può essere sostituita da una coppia di soluzioni del tipo (18), (19)

Concludendo abbiamo dimostrato il seguente teorema

Theorem 153 Se $P_n(D)$ e' un operatore reale, lo spazio vettoriale W delle soluzioni della (12) in $\mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, ha una base di funzioni in $\mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Questa base consiste di funzioni della seguente forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} t^j e^{\lambda t}; & j = 0, \dots, \mu_\lambda - 1 \\ t^j e^{at} \cos bt; & j = 0, \dots, \mu_{a+ib} - 1 \\ t^j e^{at} \sin bt; & j = 0, \dots, \mu_{a-ib} - 1 \end{array} \right.$$

ove $\lambda, a, b \in \mathbf{R}$; $\lambda, a+ib, a-ib$ sono radici del polinomio (13) aventi molteplicità μ_λ, μ_{a+ib} e $\mu_{a-ib} = \mu_{a+ib}$.

Inoltre tale base genera l'insieme delle soluzioni reali W delle soluzioni della (13) in $\mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$

3.4.1 Qualche esercizio

Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$u'' + 4u = 0; \quad u(3) + u' = 0; \quad u^{(4)} - u'' = 0$$

$$u'' + iu = 0; \quad u^{(4)} - 2u'' + u = 0; \quad u'' + cu + u = 0.$$

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + 4u = 0; \\ u(1) = 0; \quad u'(1) = 2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + iu = 0; \\ u(0) = 0; \quad u'(0) = 2i. \end{array} \right.$$

3.5 Metodo della variazione delle costanti

Si consideri la seguente equazione lineare non omogenea

$$P_n(D)u = f(t) \tag{20}$$

Per motivi teorici che qui non esamineremo, ogni soluzione u della (20) può essere scritta nella seguente forma:

$$u(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t) \tag{21}$$

ove $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sono n soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea e $c_1(t), \dots, c_n(t)$, sono le incognite che possono essere determinate usando l'equazione ed imponendo altre $n - 1$ relazioni. Nel caso $n = 1$, abbiamo applicato questo metodo per la risoluzione dell'equazione (10).

Questo metodo per determinare una soluzione della (20) si chiama metodo della variazione delle costanti. In teoria esso porta alla risoluzione esplicita della

nostra equazione qualora si riescano a fare degli opportuni integrali (come abbiamo visto nel caso (10)); in pratica esso è molto laborioso e praticamente inutile per equazioni di ordine superiore al secondo o al terzo. Dunque, esamineremo questo metodo nei dettagli solo nel caso delle equazioni del secondo ordine.

Si consideri dunque l'equazione

$$u'' + au' + bu = f(t) \quad (22)$$

La soluzione generale dell' equazione omogenea associata è

$$u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

dunque si cercherà una soluzione del tipo

$$u(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

Derivando si ottiene

$$u'(t) = c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) + c_1(t)x'_1(t) + c_2(t)x'_2(t)$$

Prima di calcolare la derivata seconda, possiamo imporre una relazione addizionale tra le funzioni c_1 e c_2 ; conviene quindi imporre una relazione che semplifichi i calcoli "eliminando" $c'_1(t)$ e $c'_2(t)$:

$$c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) = 0 \quad (23)$$

In tal modo, nella u' non figurano le derivate di c_1 e c_2 :

$$u'(t) = c_1(t)x'_1(t) + c_2(t)x'_2(t)$$

dunque, per la derivata seconda di u abbiamo:

$$u''(t) = c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) + c_1(t)x''_1(t) + c_2(t)x''_2(t)$$

Sostituendo questa espressione nell' equazione (22) si ha

$$(c'_1 x_1 + c'_2 x_2 + c_1 x''_1 + c_2 x''_2) + a(c_1 x'_1 + c_2 x'_2) + b(c_1 x_1 + c_2 x_2) = f$$

da cui

$$(c'_1 x_1 + c'_2 x_2) + c_1 (x''_1 + ax'_1 + bx_1) + c_2 (x''_2 + ax'_2 + bx_2) = f$$

e ricordando che x_1 ed x_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea si ha:

$$c'_1 x_1 + c'_2 x_2 = f \quad (24)$$

Dalla (23) e dalla (24) si ricavano c'_1 e c'_2 .

Una volta determinati c'_1 e c'_2 , si ricava c_1 e c_2 mediante operazioni di integrazione.

Vediamo un esempio. Si determini la soluzione generale della seguente equazione:

$$u'' - u = \frac{1}{1 + e^t} \quad (25)$$

La soluzione generale dell' equazione omogenea è

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

dunque si cercherà una soluzione del tipo

$$u(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}.$$

Derivando si ottiene

$$u(t) = c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t - c_2(t)e^{-t}.$$

Prima di calcolare la derivata seconda, ci ricordiamo di imporre la nostra relazione addizionale tra le funzioni c_1 e c_2 :

$$c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0 \quad (26)$$

Per la derivata seconda di u abbiamo:

$$u''(t) = c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}$$

Facendo le opportune sostituzioni nell'equazione, si ricava:

$$c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{1 + e^t} \quad (27)$$

Risolviendo il sistema (26),(27) si ottiene

$$c_1'(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{1 + e^t}$$

$$c_2'(t) = -\frac{1}{2} \frac{e^t}{1 + e^t}$$

da cui, integrando

$$c_1(t) = -\frac{1}{2} [e^{-t} + t - \log(1 + e^t)] + k_1$$

$$c_2(t) = -\frac{1}{2} \log(1 + e^t) + k_2$$

Dunque la soluzione generale della (27) è

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} [e^{-t} + t - \log(1 + e^t)] e^t - \frac{1}{2} \log(1 + e^t) e^{-t} = \\ &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} + t e^t + \log(1 + e^t) \left[\frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \right] = \\ &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} - t e^t + \log(1 + e^t) \sinh(t). \end{aligned}$$

3.5.1 Qualche esercizio

Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$u'' + u = \frac{1}{\sin t + 1}$$

$$u^{(3)} - u' = \frac{1}{e^{2t} - 1}$$

(aiuto: si ponga $w = u'$)

$$u^{(4)} - u'' = \sin t + t$$

(aiuto: si ponga $w = u''$)

$$u'' + iu = it$$

$$u'' + 4u = \tan t$$

3.6 Metodo dei coefficienti indeterminati

Come abbiamo osservato nel paragrafo precedente, il metodo della variazione delle costanti è lungo e laborioso e praticamente inservibile per equazioni di ordine elevato. Comunque nei casi in cui il secondo membro dell'equazione (20, pag. 83) è di tipo particolare si può applicare un altro metodo che sarà illustrato dal seguente teorema:

Theorem 154 *Si voglia risolvere l'equazione*

$$P_n(D)u = f(t) \quad (28)$$

ove $f(t)$ è soluzione di una qualche equazione lineare a coefficienti costanti, cioè esiste un polinomio Q_m tale che

$$Q_m(D)f(t) = 0. \quad (29)$$

Sia $x_1(t), \dots, x_n(t)$ un sistema linearmente indipendente di soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$P_n(D)u = 0$$

e sia $x_1(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t), \dots, x_{n+m}(t)$ un sistema linearmente indipendente di soluzioni dell'equazione di ordine $n + m$

$$Q_m(D)P_n(D)u = 0$$

Allora la soluzione della (6-1) ha la seguente forma:

$$u(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) + d_1 x_{n+1}(t) + \dots + d_m x_{n+m}(t) \quad (30)$$

ove $c_1, \dots, c_n$ sono costanti arbitrarie (che possono essere determinate dalle condizioni iniziali), e $d_1, \dots, d_m$ sono delle costanti che possono essere determinate dalla particolare forma della f .

Dimostrazione. Sia $\bar{u}$ una qualunque soluzione della (28); allora applicando ad ambedue i membri della (28) l'operatore $Q_m(D)$, usando la (29), si ottiene

$$Q_m(D)P_n(D)\bar{u} = Q_m(D)f = 0$$

Dunque $\bar{u}$ è soluzione della equazione

$$Q_m(D)P_n(D)u = 0$$

e quindi deve avere la forma (30).

■

Se i polinomi $P_m(\lambda)$ e $Q_m(\lambda)$ non hanno radici in comune, allora una soluzione particolare dell'equazione (28) ha la forma

$$\bar{u}(t) = d_1 x_{n+1}(t) + \dots + d_m x_{n+m}(t) \quad (31)$$

ove $x_{n+1}(t), \dots, x_{n+m}(t)$ sono le soluzioni dell'equazione

$$Q_m(D)u = 0.$$

Vediamo un esempio. Si trovi una soluzione particolare dell'equazione

$$u^{(3)} - u' = te^{2t} \quad (32)$$

In questo caso si ha $Q_2(D) = (D - 2)^2$; poichè $P_3(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$ e $Q_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ non hanno radici in comune, una soluzione particolare della (32) ha la forma

$$\bar{u}(t) = d_1 e^{2t} + d_2 t e^{2t}$$

Per determinare d_1 e d_2 si deve sostituire $\bar{u}(t)$ nell'equazione (32). Cominciamo a calcolare le derivate:

$$\bar{u}'(t) = (2d_1 + 2d_2 t + d_2) e^{2t}$$

$$\bar{u}''(t) = (4d_1 + 4d_2 t + 4d_2) e^{2t}$$

$$\bar{u}'''(t) = (8d_1 + 8d_2 t + 12d_2) e^{2t}$$

Dunque

$$\bar{u}''' - \bar{u}' = (6d_1 + 6d_2 t + 11d_2) e^{2t}$$

e quindi, sostituendo nella (32)

$$(6d_1 + 6d_2 t + 11d_2) e^{2t} = te^{2t}$$

Pertanto d_1 e d_2 devono soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 6d_1 + 11d_2 = 0 \\ 6d_2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} d_1 = -\frac{11}{36} \\ d_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Un'altro esempio. Si trovi una soluzione particolare dell' equazione

$$u'' + u = \cos t \quad (33)$$

In questo caso si ha $Q_2(D) = D^2 + 1$; piòchè

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + 1 = Q_2(\lambda)$$

ogni soluzione della (33) è soluzione dell' equazione

$$(D^2 + 1)^2 u = 0$$

e quindi ha la forma

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + d_1 t \cos t + d_2 t \sin t$$

Dunque una soluzione particolare della non omogenea ha la forma

$$\bar{u}(t) = t (d_1 \cos t + d_2 \sin t)$$

Per determinare d_1 e d_2 si deve sostituire $\bar{u}(t)$ nell' equazione (33). Poichè

$$\bar{u}'' + \bar{u} = 2(-d_1 \sin t + d_2 \cos t)$$

d_1 e d_2 devono soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} -2d_1 = 0 \\ 2d_2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il caso in cui $P_n(\lambda)$ condivide con $Q_m(\lambda)$ radici complesse corrisponde al fenomeno fisico della "risonanza".

3.6.1 Qualche esercizio

Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$u'' + 4u = e^t + 1; \quad D^3 u + Du = t \cos t$$

$$u^{(4)} - u'' = \sin t + t; \quad u'' + iu = it$$

$$(D^3 - 1)u = t^2$$

$$u^{(4)} - 2u'' + u = 0.$$