a.a. 2016-2017
Corso di Algebra lineare e Analisi matematica II
Modulo di Analisi matematica II
prof. Stefano Galatolo

Terzo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
24 marzo 2017

Argomenti: teoremi sulle funzioni continue e differenziabili.

Esercizio 1
Stabilire se i seguenti insiemi sono aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi.

a) $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(x-1) = 0 \}$;
b) $B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y^2 + z^2 = 3 \}$;
c) $C =$ dominio di $f(x, y) = \log(\cos(x^2 + y^2))$;
d) $D =$ dominio di $g(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;
e) $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \frac{1}{\sin(x)} \} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, |y| \leq 1 \}$.

Esercizio 2
Date le funzioni

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$
$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

a) stabilire se siano differeziabili nell'origine e
b) calcolarne le derivate direzionali nell'origine.

Esercizio 3
Verificare che la funzione $f(x, y) = (x - y^2)\sqrt{-\log\sqrt{x^2 + y^2}}$ non è di classe C^2 nel disco chiuso di raggio 1.

Esercizio 4
i. Si dice che un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ è un cono se si verifica che

$$x \in E \implies tx \in E \; \forall t > 0.$$

Quali tra le affermazioni seguenti sono vere?
a) Ogni cono è aperto.
b) Ogni cono è chiuso.
c) Ogni cono è convesso.

ii. Sia E un cono e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Una funzione $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice omogenea di grado α su E se per ogni $x \in E$ e per ogni $t > 0$

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

a) Dare degli esempi di funzioni omogenee.
b) Dimostrare che se f è una funzione derivabile ed omogenea di grado α su E allora le sue derivate parziali sono funzioni omogenee di grado $\alpha - 1$.

c) Dimostrare che se f è una funzione differenziabile nel cono aperto E, allora essa è omogenea di grado α su E se e solo se vale l'identitá di Eulero

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} Df(x) \cdot x.$$

Esercizio 5

Sia M una matrice quadrata $N \times N$ a coefficienti reali. La forma quadratica associata ad M é

$$q(x) = \frac{1}{2} Mx \cdot x.$$

i. Se M^t denota la trasposta di M, provare che $Mx \cdot x = x \cdot M^t x$ e dedurne che

$$q(x) = \frac{M + M^t}{2} x \cdot x.$$

Spiegare per quale motivo si può sempre assumere che la matrice tramite la quale q è definita sia simmetrica.

ii. Dimostrare che q è una funzione di classe C^∞ e calcolarne le derivate parziali per un arbitrario ordine k. Calcolare inoltre il differenziale di q.

iii. Imitando la dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, provare che se M è semidefininita positiva, allora $|Mx \cdot y| \leq \sqrt{q(x)q(y)}$. Utilizzare questa disuguaglianza per mostrare che quando M è semidefinita positiva, q è una funzione convessa su $\mathbb{R}^N$. Cosa si può dire se M è semidefinita negativa?

iv. Dimostrare che se M è definita positiva (rispettivamente negativa) allora ammette un unico punto di minimo (rispettivamente di massimo) in $\mathbb{R}^N$.

Esercizio 6

Stabilire se i seguenti sistemi ammettono soluzioni, eventualmente al variare dei parametri indicati:

a) $$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \\ \dfrac{|x|^{\frac{7}{8}}\, y}{|x|^{\frac{7}{4}} + y^2} = \dfrac{7}{31} \end{cases};$$

b) $$\begin{cases} x > 0 \\ \arcsin\left(\dfrac{1}{1 + xy^4}\right) = \alpha, \quad \text{con } \alpha \in [0, +\infty) \end{cases};$$

c) $$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ \dfrac{(x^2-1)(y^2-3)}{(x^2-1)^2 + (y^2-3)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{10} \end{cases}.$$

Esercizio 7

Dimostrare che

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall\, x > 0, y > 0.$$