a.a. 2016-2017
Corso di Algebra lineare e Analisi matematica II
Modulo di Analisi matematica II
prof. Stefano Galatolo

Secondo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
17 marzo 2017

Argomenti: continuità e calcolo differenziale per funzioni di piú variabili, massimi e minimi.

Esercizio 1
Calcolare i gradienti delle seguenti funzioni definite su $\mathbb{R}^N$:

a) $f(v) = |v|^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) $f(v) = g(|v|)$, essendo $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

Esercizio 2
(Vedere anche Foglio 1, Esercizio 4.e) Studiare derivabilità e differenzabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + |y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Esercizio 3
Studiare la continuità, la derivabilità e la differenzabilità delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y) = 1 + (x^2 + y^2)\,|x|\,;$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } y < x^3 \\ y & \text{altrimenti} \end{cases};$

c) $f(x,y) \begin{cases} e^x - e^y & \text{se } y \leq x \\ x - y & \text{altrimenti} \end{cases}.$

Esercizio 4
Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro positivo o nullo e si consideri

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{(\sin x)^2 + 2(\sin y)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Determinare l'insieme di definizione di f, stabilire per quali valori del parametro è continua e per quali valori è differenzabile.

Esercizio 5

i. Verificare che le seguenti classi di funzioni sono continue:
  a) funzioni lipschitziane;
  b) funzioni hölderiane;
  c) funzioni affini.

ii. Verificare che le funzioni affini sono anche differenziabili. Che cosa si può dire del loro differenziale?

iii. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana; cosa si può dire della norma di ∇f nei punti in cui f è derivabile?

Esercizio 6

Calcolare i punti critici delle seguenti funzioni e tentare di stabilirne la natura:

a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}\exp(-x^2 - y^2)\right)$;

c) $f(x,y,z) = \sin\left(\frac{xz}{y}\right)$;

d) $f(x,y,z) = \log(y(x^2 + y^2))$;

e) $f(x,y,z) = (x^2 - y)\cos(z^2)$.

Esercizio 7

Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire gli estremi inferiore e superiore dell'immagine quando le coordinate variano negli insiemi specificati. Qualora questi siano massimi o minimi, determinare i punti in cui sono assunti.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ con $x \leq 0$, $y \leq 0$ e $x + y \geq -3$;

b) $f(x,y) = 3x - 2y$ con $x \in [-\pi, \pi]$, $y \geq |\sin(x)|$ e $x^2 + y^2 \leq 25$;

c) $f(x,y) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x y^2}{y^2(1+x^2)}\right)$ con $x^2 + y^2 \leq 1$;

d) $f(x,y,z) = \log\left(\frac{y + z^2}{2x}\right)$ con $x \in [2,3]$, $z \in [-7,0]$ e $0 \leq y + z^2 \leq 4$;

e) $f(v) = \exp\left(\frac{|v|^3}{5|v| - 8}\right)$ con $v \in \mathbb{R}^N$ e $|v| \leq \frac{8}{5}$.

Esercizio 8

Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire gli estremi inferiore e superiore dell'immagine. Qualora questi siano massimi o minimi, determinare i punti in cui sono assunti.

a) $f(x,y) = \frac{\cos(2\pi x)}{1 + y^2}$;

b) $f(x,y) = \exp\left(\frac{xy}{(xy)^2 + 4}\right)$;

c) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi z}{2(1 + x^2 + y^2 + x^2)}\right)$;

d) $f(v) = -\log\left(\frac{|v|^2 - 1}{|v|^4 - 1}\right)$;

e) $f(v) = \frac{\exp(-|v|^2)}{1 - \exp(-|v|^2)}$.