

Primo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
10 marzo 2017

Argomenti: successioni e funzioni in \mathbb{R}^N , continuità per funzioni di più variabili, curve, integrali curvilinei.

Esercizio 1

i. Siano x_0, y_0 e z_0 tre numeri reali assegnati e sia $v \in \mathbb{R}^N$. Stabilire il comportamento asintotico di ciascuna delle seguenti successioni e calcolare l'eventuale punto limite:

a) $(x_n, y_n) = \left(x_0 + \frac{n+1}{n}, \frac{y_0}{n^2}\right);$

b) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{\log(n)}{n}x_0, \cos(2\pi ny_0), \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{n}}z_0\right)\right);$

c) $(x_n, y_n) = \left(x_0 + \sin\left(\arctg\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\right), y_0 + \frac{\cos((-1)^n\pi)}{\sqrt[3]{n}}\right);$

d) $(x_n, y_n, z_n) = r_n(\sin \vartheta_n \cos \psi_n, \sin \vartheta_n \sin \psi_n, \cos \vartheta_n)$, dove $r_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}|v|$, $\vartheta_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{(-2)^nn}$ e

$$\psi_n = \frac{\pi n}{n+9};$$

e) $v_n = \frac{1+(-1)^n}{2n}v.$

ii. Calcolare la norma delle successioni dei punti *d)* ed *e)* e stabilire il comportamento asintotico delle successioni numeriche così trovate.

iii. Cosa si può dire in generale del legame tra convergenza delle componenti di una successione e convergenza della successione? Qual è invece il legame con la convergenza delle norme di una successione?

Esercizio 2

Stabilire il comportamento asintotico della successione

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\log n} + (\alpha^2 - 3) \sin(n), \log\left(\frac{\alpha n^3 + 1}{(n+1)^3}\right)\right)$$

al variare del parametro reale α .

Esercizio 3

i. Determinare e disegnare il dominio delle seguenti funzioni:

a) $f(x, y, z) = \frac{\log \sqrt[5]{z-y}}{x^2-y};$

b) $f(x, y) = \left(\sqrt{y^2-2y-x}, \frac{1}{\cos(2\pi x)}\right);$

c) $f(x, y, z) = \left(\exp\left(\frac{x}{y}\right), \arctg(x+z)\right);$

d) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y^2-z^2}, \log(1-x^2-y^2-z^2), \operatorname{tg}(y)\right);$

e) $f(v) = \frac{1}{|v - v_0| - 1}$, dove $v, v_0 \in \mathbb{R}^N$ con v_0 assegnato.

ii. Quali tra le funzioni precedenti sono iniettive? Quali suriettive?

Esercizio 4

Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

- a) $f(x, y) = \frac{x + y}{xy}$;
- b) $f(x, y) = \frac{x + (x^2 + y^2)}{2x + y - (x + y)^2}$;
- c) $f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{x^4 + y^2}$;
- d) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \neq 0 \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$;
- e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + |y|} & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$;
- f) $f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^2 \leq y^2 + z^2 \\ \log(x^2 - y^2 - z^2) & \text{altrimenti} \end{cases}$;
- g) $f(x, y) = \left(e^{y-x}, \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right)$;
- h) $f(x, y, z) = \left(\sqrt{x}, \frac{1}{z}, \arctg(x^2 + y^2) \right)$.

Esercizio 5

Stabilire se esistono valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali per cui la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y - \sin(x))}{e^{y - \sin(x)}} & \text{se } y > \sin(x) \\ \alpha & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia continua da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} .

Esercizio 6

- i. Che differenza c'è tra curve iniettive e curve semplici? Esistono curve chiuse iniettive?
- ii. Stabilire se le seguenti curve:
- a) strofoide: $\gamma(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$ con $t \in \mathbb{R}$;
- b) elica cilindrica: $\gamma(t) = (a \cos(2\pi t), a \sin(2\pi t), bt)$ con $a > 0, b \in \mathbb{R}$ e $t \in [-1, 1]$;
- c) $\gamma(t) = (a \cos(2\pi t), a \sin(2\pi t), b)$ con $a > 0, b \in \mathbb{R}$ e $t \in [-1, 1]$;
- sono semplici, chiuse e/o di classe C^1 .
- iii. Ripetere il punto precedente per la cardiode $(x(t), y(t)) = r(t)(\cos(t), \sin(t))$ con $r(t) = a(1 + \cos(t))$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 7

Si considerino le curve:

a) $\gamma(t) = \left(t, t^{\frac{3}{2}} \right), t \in \left[\frac{5}{9}, \frac{7}{9} \right]$;

- b) $\gamma(t) = (1, t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]$;
- c) $\gamma(t) = (\sin^2(t), \cos(t) \sin(t))$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- d) spirale archimedeana: $\gamma(t) = (a + bt)(\cos(t), \sin(t))$ con $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $t \in \left(-\frac{a}{b}, 2n\pi - \frac{a}{b}\right]$, $n \in \mathbb{N}$;
- e) spirale logaritmica: $\gamma(t) = ae^{bt}(\cos(t), \sin(t))$ con $a \in \mathbb{R}$, $t \in [-n\pi, n\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

Stabilire per quali valori del parametro t esse sono ben definite e per quali sono regolari. Calcolarne poi la lunghezza (se possibile) negli intervalli indicati.

Esercizio 8

Per $t \in [t_0, t_1]$, sia

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos(t) \\ y(t) = r(t) \sin(t) \end{cases}$$

l'espressione in coordinate cartesiane di una curva piana γ . Verificare che γ è regolare se e solo se per ogni $t \in (t_0, t_1)$

$$r(t)^2 + r'(t)^2 > 0.$$

Esercizio 9

Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

- a) $\int_{\gamma} x$, $\gamma(t) := (t, t^2)$, $t \in [0, a]$ con $a > 0$;
- b) $\int_{\gamma} \frac{x}{1+y^2}$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- c) $\int_{\gamma} y^2$, $\gamma(t) := (t, e^t)$, $t \in [0, \log 2]$;
- d) $\int_{\gamma} \sqrt{z}$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$;
- e) $\int_{\gamma} \frac{x^2 + z}{\sqrt{5 + 4y^2}}$, $\gamma(t) := (2t, t, t^2 + 4)$, $t \in [0, 2]$;

Esercizio 10

Siano $a, b > 0$; data l'ellisse

$$\mathcal{E} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

calcolare l'integrale curvilineo di $f(x, y) := xy$ lungo una curva γ che parametrizza il ramo di \mathcal{E} che giace nella regione $\{x > 0, y > 0\}$.