Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2
15-2-2017

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	C	C	C	A	B	A	B	B
II								
III								
IV								

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO [4] **1** Per l'applicazione lineare f : $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y, z, t, u) = (x + y + z + t + u, 2x + 2y + 2z + 2t + 2u)$ determinare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.

R:La matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche 'e: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, una base 'e costituita dal vettore $(1, 2)$, ed una sua rappresentazione cartesiana 'e data dall'equazione $2x - y = 0$. Il nucleo ha dimensione 4, ed 'e rappresentato dall'equazione: $x+y+z+t+u = 0$. Possiamo scegliere

y, z, t, u come variabili libere. Quindi $x = -y - z - t - u$, ed una base per $Ker(f)$ 'e data dai vettori: $(-1, 1, 0, 0, 0)$,$(-1, 0, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 0, 1)$.

ESERCIZIO 2 [4] Al variare del parametro$k \in \mathbb{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:

$$\begin{cases} kx + 2y = k \\ 2x + ky = 4 - k. \end{cases}$$

R: Il determinante della matrice incompleta è $k^2 - 4$. Quindi, se $k \notin \{-2, 2\}$, allora il sistema ammette un'unica soluzione. Data da...

Gli altri casi possono essere studiati a parte. Se $k = -2$, il sistema non ha soluzione. Se $k = 2$, il sistema ammette una famglia a un parametro di soluzioni.

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1.[5] Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2} y \arctan(x^2+y^2) \ se \ (x,y) \neq 0 \\ 0 \ se \ (x,y) = 0 \end{cases}$$

(il testo conteneva un errore di stampa, la condizione doveva essere $x \neq 0, x = 0$, procederemo alla soluzione del testo come presentato)

1. [3] Si stabilisca se la funzione è continua e differenziabile ovunque.

   R: La funzione non è definita sui tuto $\mathbb{R}^2$, ma su $\mathbb{R}^2 - \{x=0\} \cup (0,0)$. La funzione non è continua in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, infatti $\lim_{t\to 0} f(t^{3/2}, t) = 1$. Per questo non può essere neanche differenziabile.

2. [1] Si calcolino le derivate parziali in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   R: $\frac{\partial f}{\partial x}$,non è definita, non potendosi fare i rapporti incrementali per incrementi finiti della x. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

3. [1] Le derivate parziali sono continue in un intorno dell'origine?

   R: Non sono definite in un intorno dell'origine.

   Altra osservazione, se esistessero e fossero continue la funzione sarebbe differenziabile e continua.

ESERCIZIO 2.[4]

- Calcolare il volume del seguente solido $A = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \textit{tali che} \ ||x|| \leq 2, x_2 \leq 1\}$. Dove $||\ ||$ rappresenta la norma euclidea.

  R:solito integrale.

- Si consideri il vettore $y \in \mathbb{R}^3$ed il solido $B_y = A + y = \{x \in \mathbb{R}^3 | \ x = z + y \ con \ z \in A\}$. Si dimostri che per ogni y il volume di B_y è uguale al volume di A.

  R: si capisce che stiamo parlando di una translazione, e ci si ricorda che le translazioni conservano l'integrale (eventialmente si nomima la formula di cambio di variabile negli integrali multipli).