Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2
18-7-2016

*	1	2	3	4	5	6	7	8
I	D	D	A	D	B	A	C	C
II	D	C	C	A	A	D	B	D
III	A	D	C	C	A	B	C	D
IV								

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 (4 pt)

Sia V l'insieme dei polinomi in t di grado ≤ 2. Sia $A : V \to V$ la funzione definita come $A(p(t)) = t^2p(1) + tp(0)$.

- Si dimostri che A è lineare, e si scriva una matrice che la rappresenta.
- Quale è la dimensione dell' immagine di A? Si trovi uno spazio P tale che $V = A \oplus P$.

ESERCIZIO 2 (4 pt)

Si consideri l'applicazione F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $F(\begin{vmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 0 \\ x_1 \\ \cdots \\ x_{n-1} \end{vmatrix}$

[p.es. $F(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$.]

-E' lineare? è invertibile?

-Si consideri l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R}^n | F^3(x) = 0\}$, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$? in caso affermativo, di che dimensione?

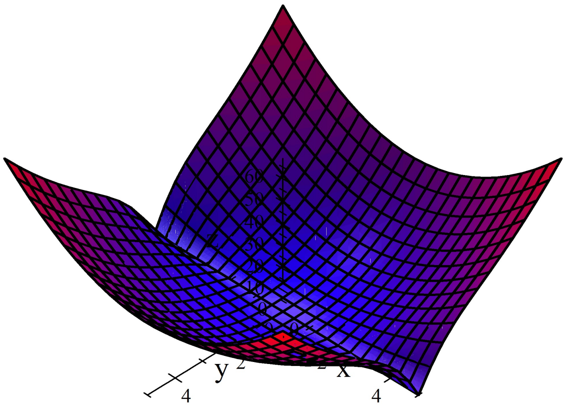
-

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1.[5]

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \arctan(|x|)$$



1. [1] f è una funzione continua? è differenziabile in tutti i punti? è differenziabile in $(0, 0)$?

   R: la funzione è continua. E' differenziabile in $(0, 0)$ ed il differenziale è nullo. La funzione NON é differenziabile per $(x, 0), x \neq 0$.

2. [1] Si calcoli l'estremo inferiore di f. Ci sono minimi locali di f?

   R: l'estremo inferiore ovviamente è 0 c'è un minimo globale lungo l'asse delle x.

3. [1] Si calcoli l'estremo superire di f. Ci sono massimi locali di f?

   R: l'estremo superiore è ∞, non ci sono massimi locali

4. [1] Si considerino gli insiemi $C_l = \{f(x, y) = l\}$. Per quali valori di $l \geq 0$ questi sono curve regolari in ogni loro punto? (non contengono punti critici o punti di non differenziabilità della funzione)

   R: Per $l > 0$.

5. [1] Si determini se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x,y) \leq c(x^2+y^2)$.

   R: Ovviamente si. (capire perché)

ESERCIZIO 2. **[3]** Determinare se il seguente campo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è conservativo e eventualmente trovarne il potenziale

$$F = (4x^3y^4 + 2x + 1)e_1 + (4y^3x^4 + 2y + 1)e_2.$$

Soluzione:$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 16x^3y^3 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. Quindi il campo è conservativo. $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, quindi esiste il potenziale U. Troviamolo.

Sappiamo che $\frac{\partial U}{\partial x} = 4x^3y^4 + 2x + 1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 4y^3x^4 + 2y + 1$. Dunque $U = \int 4x^3y^4 + 2x + 1 \; dx$ ma anche $U = \int 4y^3x^4 + 2y + 1 \; dy$

Partiamo dalla prima, otteniamo

$$\begin{aligned} U &= \int 4x^3y^4 + 2x + 1 \; dx = \\ & x^4y^4 + x^2 + x + h(y) \end{aligned}$$

Cosi $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^4y^4 + x^2 + x + h(y)) = 4y^3x^4 + h'(y)$ ma anche $\frac{\partial U}{\partial y} = 4y^3x^4 + 2y + 1$ quindi $h'(y) = 2y + 1$ da cui $h(y) = y^2 + y + c$ quindi $U(x,y) = x^4y^4 + x^2 + x + y^2 + y + c$