Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2
27-6-2016

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	A	D	C	C	A	C	C	D		
II	D	D	A	C	A	A	C	D		
III	D	C	C	C	A	B	C	B		
IV										

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 (4 pt)

In $\mathbb{R}^4$si considerino i vettori $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix}, v_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, v_3 = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}, v_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

Si considerino $H = span(v_1, v_2)$, $K = span(v_3, v_4)$.

- Si determini la dimensione di $H + K$ ed una sua base. Si dica se questi formano una somma diretta.
- Si determini la dimensione di $H \cap K$ e si determini una sua base

Si deve calcolare il rango di $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$. Riduciamo la matrice a scala

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ quindi il rango è 3 da cui discende che $H + K$ ha dimensione 3 e i due spazi non formano una somma diretta. Una base di $H+K$ è $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Per la formula di Grassman si ottiene che $\dim(H \cap K) = 1$.

Per trovare una base per l'intersezione determiniamo una base di $\ker(A)$: Il vettore $v = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$. Sappiamo quindi che $1v_1 - 2v_2 = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ è un vettore non nullo che appartiene a $H \cap K$ e come tale sarà una sua base.

ESERCIZIO 2 (3 pt)

Sia $A \in M_{n,n}$ una matrice di rango $r \leq n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere giustificando la risposta:

1. Se esiste $b \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = b$ ammette più di una soluzione allora esiste $c \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = c$ non ha soluzione.
2. Se esiste $c \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = c$ non ha soluzione allora esiste $b \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = b$ ammette più di una soluzione.
3. Se esiste $b \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = b$ ammette più di una soluzione, allora per ogni $c \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax = c$ ammette più di una soluzione.
4. Se esiste $b \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = b$ ammette una unica soluzione, allora per ogni $c \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax = c$ ammette una unica soluzione.

Suggerimento: si rifletta sui risultati sulla risolubilità dei sistemi lineari e in particolare il teorema di Rouche Capelli.

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 Si consideri la funzione$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \max(|x|, y^2)$

1. [2] In quali punti la funzione è continua e differenziabile? nell'origine ci sono direzioni per cui la derivata direzionale esiste?

   Suggerimento: La funzione è continua ovunque, è differenziabile in tutti i punti dove $|x| \neq y^2$ non è differenziabile lungo le curve $x = \pm y^2$,come può essere verificato calcolando il gradiente vicino a questi punti. Lungo l'asse delle y la funzione è derivabile.

2. [1] La funzione è limitata? ci sono massimi o minimi locali?

   Suggetimento: non è limitata. C'è un minimo locale e globale nell origine.

3. [1] Si considerino le curve di livello γ_h individuate dall' equazione $f(x,y) = h$.Per quali $h > 0$, γ_h può essere parametrizzato come una curva regolare?

   Suggerimento: tutte le curve di livello sono rettangoli, non hanno parametrizzazioni regolari

4. [1] Per quali h, γ_h è un insieme limitato?

   Suggerimento: essendo rettangoli, sono limitati

5. [2] Si calcoli
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy$$

   Sugg. $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = 4\int_0^1 dx[\int_0^{\sqrt{x}} xdy + \int_{\sqrt{x}}^1 y^2dy]$...

ESERCIZIO 2

[4] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \max(|x|, y^2)$ di cui sopra, ed il campo ∇f, definito in $C \subseteq \mathbb{R}^2$ dove C è il luogo dei punti dove la funzione f è differenziabile.

1. Si scelga una curva γ tale che $\gamma \cap C \neq \emptyset$ e si calcoli il lavoro fatto dal campo lungo questa curva.

2. Ci sono curve in $\mathbb{R}^2$ per le quali non ha senso calcolare il lavoro fatto dal campo?

3. E' vero che per tutte le curve chiuse, la circuitazione di questo campo è 0?si discuta brevemente la questione.

   Suggerimento: l'insieme dove è definito il campo non è connesso. Il campo è ovviamente conservativo su queste componenti connesse, ma non è cosi ovvio cosa succeda su curve che passano da una componente all'altra. Con una piccola riflessione si vede però che per curve che escono dal dominio solo per un numero finito di punti, il lavoro si definisce comunque (è un integrale di una funzione non definita solo in alcuni punti isolati) ed il campo si comporta come un campo conservativo.Ci sono però curve che stanno totalmente o per un intervallo non banale fuori dal dominio. Su queste il lavoro del campo non è definito.