Corso di Ingegneria Elettronica e telecomunicazioni - Algebra Lineare e Analisi 2
6-6-2016

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	D	A	C	D	D	B	C	B		
II	A	A	C	D	D	A	C	D		
III	D	B	A	A	C	B	C	B		
IV										

Algebra Lineare. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia. Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 (4 pt)

Sia V l'insieme dei polinomi in t di grado ≤ 2. Sia $A : V \to V$ la funzione definita come $A(p(t)) = \tilde{p}(t)$, dove $\tilde{p}(t) = t^2 p(t^{-1})$ è il polinomio coniugato, ottenuto ribaltando i coefficienti (se $p(t) = at^2 + bt + c$, allora $\tilde{p}(t) = ct^2 + bt + a$).

- Si dimostri che A è lineare, e si scriva una matrice che la rappresenta.
- Si calcolino gli autovalori di A, e si determini se è diagonalizzabile.

RISPOSTA (accenno)
Esercizio standard: con i soliti calcoli si dimostra che è lineare.
Si considera la base $\{1, t, t^2\}$. Si ha che
$A(1) = t^2$, $A(t) = t$, $A(t^2) = 1$. Quindi la matrice associata é $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, gli autovalori sono 1 e -1. 1 ha molteplicità geometrica 2 e -1 ha molteplicità geometrica 1. Quindi si diagonalizza.

ESERCIZIO 1 (3 pt)

- Determinare se la matrice $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, è diagonalizzabile sui reali.
- Determinare gli autovalori di A^{10}. A^{10} è diagonalizzabile?.

  Risp. La matrice ha un autovalore 2 di molteplicità geometrica 1, quindi non si diagonalizza. Facendo il prodotto righe per colonne e qualche semplice ragionamento (completare) si vede che A^n è una matrice della forma $\begin{vmatrix} 2^n & 0 \\ x & 2^n \end{vmatrix}$con $x > 0$ Quindi questa matrice avrà un autovalore 2^n e come prima non è diagonalizzabile.

Analisi 2. Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta e consegnata in bella copia . Le risposte devono essere giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 Si consideri la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \ se \ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 \ se \ x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$.

1. [1] La funzione è continua, differenziabile in ogni punto?

   Si nota che posto $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$ $f = \frac{\sin(r^2)}{r}$ la funzione è una funzione della distanza dall'origine, il grafico avrà simmetria radiale. Poiché $\lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r} = 0$ allora la funzione è continua.

   Siccome vicino a 0, $\frac{\sin(r^2)}{r} \sim r$, la funzione non può essere differenziabile in 0 (perché?). La funzione sarà differenziabile in tutti gli altri punti perché etc etc...

2. [1] La funzione è limitata?

   Essendo $\frac{\sin(r^2)}{r}$ limitata in un intorno di 0, lo sarà anche f negli altri punti la funzione è cotinua e i limiti all' infinito fanno 0 , quindi globalmente la funzione è limitata.

3. [1] Si consideri l'insieme γ_h individuato dall' equazione $f(x,y) = h$. Ci sono valori di h per cui l'insieme è unione di curve regolari (non contengono punti critici della f)?

   Visto che f è a simmetria radiale, γ_h è costituito da circonferenze. Contiene una circonferenza per ogni soluzione di $\frac{\sin(r^2)}{r} = h$. Se h non è un valore critico di $\frac{\sin(r^2)}{r}$ l'intersezione è trasversale.

   Siccome i valori critici di quella funzione sono un insieme numerabile, ci sono valori di h per cui l'intesezione è trasversale.

4. [2] Per quali h, γ_h è un insieme limitato?

   Ogni circonferenza è un insieme limitato. Quindi, bisogna vedere per quali h $\frac{\sin(r^2)}{r} = h$ è un insieme limitato. Questo avviene per $h \neq 0$. (Perché?)

   Faccio notare che la limitatezza delle curve di livello non c'entra niente con la limitatezza della funzione. Si pensi alle funzioni costanti oppure alla fuzione $f(x,y) = x^2+y^2$.

ESERCIZIO 2

Si consideri un campo vettoriale C^1, $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$. Si supponga che $\mathbf{F}$ soddisfi i seguenti requisiti:

- $rot(\mathbf{F}) = 0$ in ogni punto
- per ogni punto (x,y), $(\mathbf{F}(x,y),(x,y)) = 0$ dove $(*,*)$ rappresenta il prodotto scalare ordinario in $\mathbb{R}^2$.
- $(\mathbf{F}(x,y), \frac{(-y,x)}{\sqrt{x^2+y^2}}) = g(\sqrt{x^2+y^2}) \geq 0$, dove $g:\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R}$ è una funzione C^1.

1. [1] Si mostri un esempio di campo che soddisfa le ipotesi di cui sopra

   Risp. L'esempio è quello del campo irrotazionale non conservativo fatto a lezione.

2. [3] Si consideri la curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} (1+t+\frac{\sin(100t)}{200})\cos(t) \\ (1+t+\frac{\sin(100t)}{200})\sin(t) \end{pmatrix}$.
   Si calcoli il lavoro fatto da $\mathbf{F}$ su γ, esprimendolo in funzione di g.

   Risp. Poiché il campo è irrotazionale possiamo rimpiazzare la curva data con un' altra che abbia gli stessi estremi e che ci permetta di usare le informazioni che abbiamo sul campo.

   Gli estremi sono $\gamma(0) = (1,0)$, $\gamma(\pi) = (-1-\pi, 0)$. Si considera la curva $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ per $t \in [0,\pi]$ e $\gamma_2 = \begin{pmatrix} -1-t \\ 0 \end{pmatrix}$ per $t \in [0,\pi]$ l'unione delle due curve ha gli sessi estremi di γ. Il lavoro lungo γ_1 è $\int_0^\pi g(1)dt = \pi g(1)$. . Il lavoro lungo γ_2 è ovviamente 0.

   Quindi il lavoro lungo γ è $\pi g(1)$.

3. [facoltativo] Si dimostri che in un campo come sopra $g(x) = \frac{g(1)}{x}$,quindi un campo che soddisfa le ipotesi è unico a meno di multipli.

   Risp. Per quanto detto sopra, il lavoro lungo tutte le circonferenze di centro l'origine e raggio r deve essere uguale, quindi per ogni r, $\int_0^\pi rg(r)dt = \int_0^\pi g(1)dt$ e quindi $\pi r g(r) = \pi g(1)$ e $g(r) = \frac{g(1)}{r}$.