26-1-2016

(le risposte non giustificate sono considerate di valore nullo)

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	A	A	B	B	C	C	B	C		
II	A	B	A	B	A	B	A	A		
III	B	C	C	A	C	C	B	A		
IV										

Si ricorda che le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1 (7 pt)

- Determinare se la matrice $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ è diagonalizzabile sui reali.
- Determinare gli autovalori di A^{10} (il prodotto della matrice per se stessa 10 volte).

R: facilmente si trova che gli autovalori sono gli elementi di $\{1, 3\}$. Quindi A è diagonalizzabile (sono diversi).

Gli autovalori di A^{10} sono $1, 3^{10}$. Per capire perché è cosi basta utilizzare la definizione di autovalore e autovettore.

v è un autivettore con autovalore 3 se $Av = 3v$, dunque $AAv = A3v = 3Av = 3 * 3v$ da cui facilmente si deduce $A^{10}v = 3^{10}v$.

- E' vero che gli autovalori di una matrice sono uguali agli autovalori della sua trasposta? (Ricordiamo che per ogni matrice A, si ha $\det(A) = \det(A^T)$)

  R:E' vero, infatti il polinomio caratteristico è $d(A - \lambda I)$, ma per quanto detto sopra $d(A - \lambda I) = d((A - \lambda I)^T) = d(A^T - \lambda I^T) = d(A^T - \lambda I)$.

- C'è una matrice B tale che $B^2 = A$? (sarebbe la radice quadrata di A)

  $$\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{matrix}$$

- $$\begin{matrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

ESERCIZIO 2 (6 pt)

Si consideri l'insieme $P_2(t)$ dei polinomi (reali) in t aventi grado minore o guguale a 2 con la base $\{1, t, t^2\}$.

Si consideri $A : P_2(t) \to P_2(t)$ tale che

$$A(p) = 2t^2 p(0)$$

- A è una applicazione lineare?

R: si, la verifica è la solita.

-Scrivere la matrice relativa ad A per la base $\left\{1, t, t^2\right\}$
R:
$A(1) = 2t^2$ (il terzo elemento della base)
$A(t) = 0$
$A(t^2) = 0$
dunque la matrice è $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
-Si consideri $V = \left\{p \in P_2(t) | A(p) = t^2\right\}$. V è un sottospazio vettoriale?
No
L'origine non appartiene a V, infatti $A(0) = 0 \neq t^2$
-Che dimensione ha $Ker(A)$? se ne trovi una base.

ESERCIZIO 3 (6 pt)

In $\mathbb{R}^4$si considerino i vettori $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix}, v_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, v_3 = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}, v_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}$
Si considerino $H = span(v_1, v_2)$, $K = span(v_3, v_4)$.

- Si determini la dimensione di $H + K$ ed una sua base. Si dica se questi formano una somma diretta.
- Si determini la dimensione di $H \cap K$ e si determini una sua base

Si deve calcolare il rango di $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$. Riduciamo la matrice a scala
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ quindi il rango è 3 da cui discende che $H + K$ ha dimensione 3 e i due spazi non formano una somma diretta. Una base di $H + K$ è $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4, & 1, & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Per la formula di Grassman si ottiene che $\dim(H \cap K) = 1$.

Per trovare una base per l'intersezione determiniamo una base di $\ker(A)$: Il vettore $v = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$. Sappiamo quindi che $1v_1 - 2v_2 = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ è un vettore non nullo che appartiene a $H \cap K$ e come tale sarà una sua base.