Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2004/2005

SOLUZIONE della prova scritta del 16-6-2005

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (\overline{z}-i)^3 = z+i \\ z^5+4z=0 \end{cases}$$

Soluzione .

(i) . Poniamo $w = z + i$.

In questo modo la prima equazione diventa

$$(\overline{w})^3 = w$$

Osserviamo che $w = 0$ è soluzione.

Supponiamo ora $w \neq 0$ ed esprimiamolo nella forma esponenziale : $w = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$. Poichè $(\overline{w})^3 = \varrho^3 \cdot e^{-i\cdot 3\vartheta}$ e la prima equazione diventa

$$\varrho^3 \cdot e^{-i\cdot 3\vartheta} = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti otteniamo

$$\begin{cases} \varrho^3 = \varrho \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ -3\vartheta = \vartheta + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte ($\varrho = 0$ è già stato considerato): $\begin{cases} \varrho = 1 \\ \vartheta = \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$

Pertanto le soluzioni della prima equazione sono

$$w = 1 \ , \ \ i \ , \ \ -1 \ , \ -i \ , \ \ 0$$

Tornando alla variabile z poichè si ha $w = z + i$ (ovvero $z = w - i$) otteniamo le seguenti 5 soluzioni della prima equazione:

$$z = 1-i \ , \ \ 0 \ , \ \ -1-i \ , \ \ -2i \ , \ \ -i$$

(ii) :

$$\begin{aligned}
&z^5+4z=0 && \Leftrightarrow \\
&z\cdot(z^4+4)=0 && \Leftrightarrow \\
&z=0 \ \text{ oppure } \quad z^4+4=0 && \Leftrightarrow \\
&z=0, \qquad z=\sqrt{2}\cdot e^{i\vartheta} && \text{con } \vartheta = \tfrac{\pi+2k\pi}{4}, \quad k=0,1,2,3
\end{aligned}$$

Otteniamo pertanto le seguenti 5 soluzioni della seconda equazione:

$$z = -1-i \ , \ \ -1+i \ , \ \ 1-i \ , \ \ 1+i, \ , \ \ 0$$

CONCLUSIONE: le soluzioni del sistema sono

$$z = -1-i \ , \ \ 1-i \ , \ \ 0$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +tx_2 & +tx_3 \\ tx_1 & +4x_2 & +4x_3 \\ x_1 & & -x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$,

Determinare, se esistono, i valori di t per cui si ha $\mathbb{R}^3 = Ker(f_t) \bigoplus W$.

Soluzione .

(i) : Sia A_t la matrice associata ad f_t rispetto alla base canonica: $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Poichè A_t è una matrice 3×3, per determinare il rango calcoliamo il determinante di A_t facendo lo sviluppo rispetto alla II colonna.

$$\det(A_t) = ... = t^2 - 4$$

Pertanto se $t \neq -2, 2$ il determinante è $\neq 0$ e quindi il rango di A_t è massimo. Ovvero

$$t \neq -2, 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 2$ abbiamo $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $\det A_2 = 0$. Poichè la I e la III colonna sono linearmente indipendenti possiamo affermare che il rango di A_2 è 2.

Per $t = -2$ abbiamo $A_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $\det A_{-2} = 0$.

Inoltre osserviamo che se prendiamo il minore $M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(M) \neq 0$.

Pertanto possiamo affermare che il rango di A_{-2} è 2.

Per il teorema della dimensione si ha $\dim(Im(f_t))+\dim(Ker(f_t)) = 3$. Allora possiamo concludere che

$$t \neq -2, 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$
$$t = -2, 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 2 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 1 \end{cases}$$

(ii) Per il teorema di Rouché-Capelli esiste almeno una soluzione $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}k(A_t) = \mathrm{r}k(A_t|b)$ dove $b_t = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per il punto (i) se $t \neq -2, 2$ si ha $\det(A_t) \neq 0$ e quindi $\mathrm{r}k(A_t) = 3$.

Poichè $\mathrm{r}k(A_t) \leq \mathrm{r}k(A_t|b)$ e abbiamo $\mathrm{r}k(A_t|b) \leq 3$ perchè $(A_t|b)$ è una matrice 3×4 possiamo concludere che per $t \neq -2, 2$ $\mathrm{r}k(A_t) = \mathrm{r}k(A_t|b_t) = 3$. Più precisamente, per questi valori di t esiste un'unica soluzione.

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 2$ la matrice ha A_2 ha rango 2. La matrice $(A_2|b)$ diventa: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il minore ottenuto eliminando la terza colonna $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, pertanto in questo caso si ha $\mathrm{r}k(A_2|b) = 3$ da cui si evince che $\mathrm{r}k(A_2|b) = 3 > 2 = \mathrm{r}kA_2$, ovvero non esiste soluzione del sistema.

Per $t = -2$ la matrice ha A_{-2} ha rango 2. La matrice $(A_{-2}|b)$ diventa: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il minore ottenuto eliminando la terza colonna $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, pertanto in questo caso si ha $\mathrm{r}k(A_{-2}|b) = 3$ da cui si evince che $\mathrm{r}k(A_{-2}|b) = 3 > 2 = \mathrm{r}kA_2$, ovvero non esiste soluzione del sistema.

CONCLUSIONE: Esiste almemo una soluzione del sistema $\forall\ t \neq -2, 2$.

(iii). Sia $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$. Osserviamo che i due vettori sono linearmente indipendenti pertanto $\dim(W) = 2$.

Per ottenere somma diretta, condizione necessaria (ma non sufficiente) è che

$$\dim(W) + \dim(Ker(f_t)) = 3$$

Pertanto le uniche possibilità sono per $t = -2, 2$.

Per $t = 2$ determiniamo una base di $Ker(f_2)$. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

Sapendo che il rango è 2 possiamo eliminare la seconda riga, quindi porre $x_3 = x_1 = t$ parametro e ottenere come base del nucleo $\left\{ v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

In questo caso avremo

$$\mathbb{R}^3 = Ker(f_2) \bigoplus W \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sono linearmente indipendenti.}$$

Poichè il determinante della matrice formata dai tre vettori è non nullo si conclude che per $t = 2$ $\mathbb{R}^3 = Ker(f_2) \bigoplus W$.

Per $t = -2$ ripetiamo il procedimento appena fatto. Determiniamo una base di $Ker(f_{-2})$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = 0 \\ -2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

Sapendo che il rango è 2 possiamo eliminare la seconda riga, quindi porre $x_3 = x_1 = t$ parametro e ottenere come base del nucleo $\left\{ v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

In questo caso avremo

$$\mathbb{R}^3 = Ker(f_2) \bigoplus W \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sono linearmente indipendenti.}$$

Poichè il determinante della matrice formata dai tre vettori è nullo si conclude che per $t = -2$ $\mathbb{R}^3 \neq Ker(f_2) \bigoplus W$.

CONCLUSIONE :

$$\mathbb{R}^3 = Ker(f_t) \bigoplus W \iff t = 2$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di f.
(iii) Dimostrare che f non è diagonalizzabile.
(iv) Dimostrare che f^2 è diagonalizzabile.

Soluzione. (i) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$.
Sviluppando rispetto alla IV colonna e quindi rispetto alla II colonna otteniamo:

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = ... = \lambda^2 \cdot (\lambda - 2)^2$$

Abbiamo pertanto i seguenti autovalori di A:
$\lambda_1 = 0$ con molteplità algebrica $= 2$;
$\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica $= 2$.

Per determinare la moteplicità geometrica occorre calcolare il rango di $(A - \lambda Id)$.

Per $\lambda_1 = 0$, analizziamo la matrice $(A - 0Id) = A$. Poichè il minore ottenuto eliminandola I riga e la I colonna di A è non nullo otteniamo $\mathrm{r}k(A) = 3$ e quindi $m.g.(0) = 4 - \mathrm{r}k(A) = 1$.

In particolare la matrice non è diagonalizzabile.

Per $\lambda_2 = 2$ analizziamo la matrice $(A - 2Id)$.

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne II e IV sono nulle. La I e la III sono tra loro lineramente indipendenti. Pertanto si ha $\mathrm{r}k(A - 2Id) = 2$ e quindi $m.g.(2) = 4 - \mathrm{r}k(A - 2Id) = 2$.

(ii) Per $\lambda_1 = 0$ dobbiamo determinare il $Ker(f)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -x_1 & & -x_3 & & = 0 \\ & & 3x_3 & +2x_4 & = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che gli autovettori per f relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

Per $\lambda_2 = 2$ dobbiamo determinare il $Ker(f - 2Id)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x_1 & +x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_3 & = 0 \\ -x_1 & -3x_3 & = 0 \\ & 3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che gli autovettori per f relativi all'autovalore $\lambda_2 = 2$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad (t, s) \neq (0, 0) \right\}.$$

(iii) Poichè $m.a.(0) = 2 \neq 1 = m.g.(0)$ allora f non è diagonalizzabile.
(iii) Per determinare gli autovalori di f^2 occorre studiare la matrice $A^2 = A \cdot A$:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico diventa $\lambda^2 \cdot (\lambda - 4)^2$ Abbiamo pertanto i seguenti autovalori di A^2:
$\lambda_1 = 0$ con molteplità algebrica $= 2$;
$\lambda_2 = 4$ con molteplicità algebrica $= 2$.
In questo caso, poichè A^2 ha due righe nulle si vede che $rk(A^2) = 2$, pertanto la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è = 4-2=2.
Analogamente per $\lambda_2 = 4$ la molteplicità geometrica è =2.
Pertanto, per entrambi gli autovalori si ha $m.g. = m.a.$, e quindi la matrice risulta essere diagonalizzabile.