Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2004/2005

SOLUZIONE della prova scritta del 3-02-2005

Esercizio 1.
i) Rappresentare nella forma trigonometrica il numero complesso $-2+i2\sqrt{3}$

ii) Si rappresenti nel piano di Gauss l' insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z+4i| > |z|\}$

iii) Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{2z} = (-2+i2\sqrt{3}) \cdot e^{\overline{z}} \\ |z+4i| > |z| \end{cases}$$

Soluzione .
(i) : Poniamo $w = (-2+i2\sqrt{3})$ nella forma trigonometrica:

$$\begin{cases} |w| = |2+i2\sqrt{3}| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4 \\ arg(w) = \frac{2\pi}{3} \qquad (\text{poichè } \cos(\vartheta) = -1/2 \ , \sin(\vartheta) = \sqrt{3}/2) \end{cases}$$

(ii) : Posto $z = x+iy$ si ha

$$\begin{aligned} &|z+4i| > |z| && \Leftrightarrow \\ &\sqrt{x^2+(y+4)^2} > \sqrt{x^2+(y)^2} && \Leftrightarrow \\ &x^2+(y+4)^2 > x^2+(y)^2 && \Leftrightarrow \\ &8y+16 > 0 && \Leftrightarrow \\ &y > -2 \ , \quad x = \text{qualsiasi} \end{aligned}$$

(iii) : Per quanto visto al punto (i) , poichè si ha $w = (-2+i2\sqrt{3}) = 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$, possiamo scrivere la prima equazione nel seguente modo:

$$e^{2z} = 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{\overline{z}}$$

Poichè $4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{\overline{z}} = e^{\log 4 + i\frac{2\pi}{3} + \overline{z}}$ tale uguaglianza è verificata se e soltanto se

$$2z = \log 4 + i\frac{2\pi}{3} + \overline{z} + i2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ponendo $z = x+iy$ e uguagliando la parte immaginaria e la parte reale otteniamo:

$$\begin{cases} 2x = \log 4 + x \\ 2y = y + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La soluzione della prima equazione è data da

$$z = \log 4 + i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Per risolvere il sistema dobbiamo imporre la seconda condizione. Per il punto (ii) tale condizione è equivalente a imporre

$$y > -2 \ , \quad x = \text{qualsiasi}$$

CONCLUSIONE: il sistema è equivalente al seguente

$$\begin{cases} z = \log 4 + i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = (\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) > -2 \end{cases}$$

e quindi la soluzione è data da $z = \log 4 + \ i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) \quad , \quad$ con $\ k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq -1.$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +x_2 & +x_3 \\ tx_1 & +2x_2 & +tx_3 \\ tx_1 & & +4x_3 \\ x_1 & & +x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Per i valori di t tali che $Ker(f_t) \neq \{0_V\}$, determinare una base di $Ker(f_t)$ e una base di $Im(f_t)$.

Soluzione .

(i) : Sia A_t la matrice associata, $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & 2 & t \\ t & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A è una matrice 4×3. Pertanto il rango è ≤ 3. Se troviamo un minore 3×3 con determinante non nullo allora possiamo concludere sicuramente che il rango è $= 3$.

Calcoliamo il rango del minore M_t ottenuto eliminando la Iriga:

$$M_t = \begin{pmatrix} t & 2 & t \\ t & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di M_t facendo lo sviluppo rispetto alla II colonna:

$$\det(M_t) = -2t + 8$$

Pertanto se $t \neq 4$ il determinante è $\neq 0$ e quindi il rango di M_t e quindi quello di A_t è massimo. Ovvero

$$t \neq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

Analizziamo adesso il caso particolare $t = 4$.

Per $t=-4$ abbiamo $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Notiamo che la III colonna = I colonna, quindi necessariamente r$k \leq 2$. Inoltre le prime due colonne sono linearmente indipendenti, pertanto possiamo concludere che per $t=4$ si ha

$$t\ = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 2 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 1 \end{cases}$$

(ii) Per il teorema di Rouché-Capelli esiste almeno una soluzione $\Leftrightarrow$ r$k(A_t)$ = r$k(A_t|b)$ dove $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Poichè A_t è una matrice 4×3 necessariamente r$k(A_t) \leq 3$. Invece $(A_t|)$ è una matrice 4×4. Allora se $\det(A_t|b) \neq 0$ abbiamo r$k(A_t) \leq 3 < 4 =$ r$k(A_t|b)$ e quindi in questo caso non esiste soluzione.

$$\det(A_t|b) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ t & 2 & t & 0 \\ t & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ... = t^2 - 6t + 8$$

(sviluppo rispetto alla IV colonna) . Le radici sono 2 e 4.

Quindi per $t \neq 2, 4$ non esiste soluzione del sistema .

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 4$, per quanto visto al punto (i) la matrice ha A_4 ha rango 2. La matrice $(A_4|b)$ diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che il minore ottenuto eliminando la I colonna e la IV riga, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0, pertanto si ha r$k(A_4|b) = 3$ e quindi

$$\mathrm{r}k(A_4) = 2 \neq 3 = \mathrm{r}k(A_4|b)$$

ovvero in questo caso non esiste soluzione.

Per $t = 2$ abbiamo visto in (i) che la matrice A_2 ha rango 3. Pertanto, poichè il determinante di $(A_2|b)$ è nullo si ha $3 = \mathrm{r}k(A_2) \leq \mathrm{r}k(A_2|b) \leq 3$, ovvero si ha l' uguaglianza

$$3 = \mathrm{r}k(A_2) = \mathrm{r}k(A_2|b)$$

e quindi il sisema ammette (un' unica) soluzione.

CONCLUSIONE: Esiste almemo una soluzione del sistema se e solo se $t = 2$.

(iii) Per quanto visto al punto (i) occorre analizzare il caso $t = 4$.

La matrice associata all' applicazione è $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sappiamo da punto (i) che il rango di tale matrice è =2. Per determinare una base dell'immagine è sufficiente quindi considerare due vettori colonna di A_4 linearmente indipendenti. Poichè i primi due vettori colonna sono lin.ind., una base per $Im(f_4)$ è data dal seguente insieme

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per determinare una base del nucleo occorre risolvere il sistema $f_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovvero

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 0 \\ 4x_1 \quad + 4x_3 & = 0 \\ x_1 \quad + x_3 & = 0 \end{cases}$$

($II \leftrightarrow \ II - 4 \cdot I$; $I|| \leftrightarrow III - 4 \cdot I$; $|V \leftrightarrow |V - I$;) Il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ -2x_2 & = 0 \\ -4x_2 & = 0 \\ -x_2 & = 0 \end{cases}$$

Ovvero si ha $x_2 = 0$. Posto $x_3 = t$, otteniamo $x_1 = -t$ e quindi $Ker(f_4) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Una base di $Ker(f_4)$ è data quindi dall'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Si dica se f è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

Soluzione. (i) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$.
Sviluppando rispetto alla II colonna si ottiene

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = ... = -\lambda \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 3)$$

Gli autovalori della matrice A sono allora $0, 2, -3$ tutti con molteplicità algebrica =1.

Poichè $1 \leq \ m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$ per ogni autovalore ed in questo caso tutti gli autovalori hanno molteplicità algebrica =1 si conclude che anche la molteplicità geometrica è $= 1$ per tutti e 3 gli autovalori.

(ii) Per $\lambda_1 = 0$ dobbiamo determinare il $Ker(f)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + \quad +x_3 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = 0 \end{cases}$$

Applicando l' algoritmo di Gauss e svolgendo i calcoli si ottiene

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

Per $\lambda_2 = 2$ dobbiamo determinare il $Ker(f - 2Id)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x_1 + \quad +x_3 & = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

Applicando l' algoritmo di Gauss e svolgendo i calcoli si ottiene

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

Per $\lambda_3 = -3$ dobbiamo determinare il $Ker(f + 3Id)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + \quad + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Applicando l' algoritmo di Gauss e svolgendo i calcoli si ottiene

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

(iii) Poichè tutte le radici del polinomio caratteristico sono in $\mathbb{R}$, allora la matrice è triangolarizzabile.

Poichè la matrice è triangolarizzabile & per ciascun autovalore si ha $m.g. = m.a. = 1$ allora la matrice è anche diagonalizzabile.

(In effetti se una matrice $n \times n$ ha n autovalori distinti allora la matrice è diagonalizzabile !)