Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2003/2004

SOLUZIONE della prova scritta del 29-06-2004

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} i \cdot e^{z+1} = e^{2\overline{z}} \\ |z-1| < 20 \end{cases}$$

Soluzione .

(i) : Poichè possiamo scrivere $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, la prima equazione diventa quindi $e^{z+1+i\frac{\pi}{2}} = e^{2\overline{z}}$ e tale uguaglianza è verificata se e soltanto se

$$z + 1 + i\frac{\pi}{2} = 2\overline{z} + i2k\pi.$$

Ponendo $z = x + iy$, si ha in particolare $\overline{z} = x - iy$, uguagliando la parte immaginaria e la parte reale, dalla precedente equazione otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(ii) : Posto $z = 1 + i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}), \quad k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$|z-1| = |i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})| = |-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}|$$

Pertanto si ha

$$\begin{array}{ll} |z-1| < 20 & \Leftrightarrow \\ |-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}| < 20 & \Leftrightarrow \\ -20 + \frac{\pi}{6} < k \cdot \frac{2\pi}{3} < 20 + \frac{\pi}{6} \ , \quad k \in \mathbb{Z} & \Leftrightarrow \\ -9 \leq k \leq 9 \ , \quad k \in \mathbb{Z} & \end{array}$$

CONCLUSIONE: la soluzione è data da $z = 1 + \ i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})$, con $k \in \mathbb{Z}, \quad -9 \leq k \leq 9.$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 + 3x_3 \\ x_1 \quad + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini una base di $Ker(f)$ e una di $Im(f)$.

(ii) Si determinino le soluzioni del sistema $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad : \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

Determinare, se esiste, un vettore $w \in \mathbb{R}^4$ tale che $w \in \Big[W \cap (Im(f)) \Big]$.

Soluzione .

(i) : Sia A la matrice associata, $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

In questo caso A è una matrice 4×3. È molto conveniente per prima cosa deteminare il rango di A.

Per determinare il rango osserviamo le relazioni "evidenti" che sussisitono tra le righe o le colonne.

PRIMO MODO: la prima e la seconda colonna sono indipendenti, mentre la III= I + II, quindi il rango è 2.

SECONDO MODO: la I riga $= -3\cdot$ IV riga. Pertanto è sufficiente fare il determinante del minore ottenuto eliminando la I riga dalla matrice. Si ottiene zero e quindi il rango è ≤ 2. D'altra parte il minore ottenuto eliminando le prime due righe e la terza colonna è non nullo , ovvero il rango è 2.

Quindi la dimensione dell'Immagine è = 2 e la dimensione del nucleo è = 3-2 = 1.

Dalle considerazioni fatte una base dell'immagine è data dai primi due vettori colonna della matrice A:

$$BASE\ di\ \ Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per determinare una base del Ker occorre risolvere l'equazione $A \cdot X = O_V$, ovvero

$$\begin{cases} 3x_2 + 3x_3 & = 0 \\ x_1 + \qquad x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\ -x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Poiche $rg(A) = 2$ e le righe III e IV sono ind. per quanto visto precedentemente il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\ -x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = t$, si ha $x_2 = -t$ e quindi $x_1 = -t$.

Ponendo $t = 1$ una base del nucleo è data da

$$BASE\ di\ \ Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Sia $(A|b)$ la matrice completa assaciata al sistema, , $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

Osserviama che la colonna $b = -$ II colonna, quindi per il teorema di Rouché-Capelli esiste soluzione del sistema, e poichè abbiamo 3 incognite e $rg(A) = rg(A|b) = 2$, le soluzioni costituiranno uno spazio affine di dimensione 1.

Applichiamo il metodo di Gauss per la risoluzione del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pertanto il sitema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 \quad + 3x_3 & = 0 \\ \quad 3x_2 + 3x_3 & = -3 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = t$, si ha $x_2 = -t - 1$ e quindi $x_1 = -t$. Le soluzioni del sistema sono quindi

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \quad t \in re \right\}.$$

(ii) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad : \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

Un vettore appartenente all' immagine di f lo possiamo scrivere come combinazione lineare dei vettori costituenti la base di $Im(f)$, pertanto per quanto visto al punto (i), un vettore $v \in Im(f)$ possiamo esprimerlo come

$$v = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta \\ \alpha \\ \alpha + 2\beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

Poichè W è descritto da un'equazione per determinare gli eventuali valori di α e β è sufficiente sostituire $x_1 = 3\beta$, $x_2 = \alpha$, ecc... nell'equazione di W.

Si ottiene allora:

$$3\beta + 2\alpha - 3(\alpha + 2\beta) - \beta = 0$$

ovvero $-\alpha - 4\beta = 0$.

Ponendo $\beta = 1$ si ottiene $\alpha = -4$, e quindi un vettore appartenente all'intersezione dei due sottospazi è

$$w = -4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

Esercizio 3. Al variare del parametro reale β sia A_β la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini il polinomio caratteristico di A_β e gli autovalori, specificandone la molteplicità algebrica.

(ii) Si determini per quali valori di β la matrice A_β è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

Soluzione. (i) Il polinomio caratteristico di A_β è $p_{A_\beta}(\lambda) = \det(A_\beta - \lambda Id)$. Sviluppando rispetto alla IV e quindi rispetto alla II riga si ha

$$p_{A_\beta}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = -\lambda(2-\lambda)^2(\beta-\lambda)$$

La radici del polinomio caratteristico sono quindi:

$$0\ , 2, \beta$$

Per il noto teorema, gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico in $\mathbb{R}$.

Ovvero, occorre distinguere i casi $\beta \neq 0, 2; \beta = 0; \beta = 2$.

Caso 1. Per $\beta \neq 0, 2$ abbiamo i seguenti autovalori:

- $\lambda_1 = 0$ con $m.a. = 1$
- $\lambda_2 = 2$ con $m.a. = 2$
- $\lambda_3 = \beta$ con $m.a. = 1$

Caso 2. Per $\beta = 0$ abbiamo i seguenti autovalori:

- $\lambda_1 = 0$ con $m.a. = 2$
- $\lambda_2 = 2$ con $m.a. = 2$

Caso 3. Per $\beta = 2$ abbiamo i seguenti autovalori:

- $\lambda_1 = 0$ con $m.a. = 1$
- $\lambda_2 = 2$ con $m.a. = 3$

(ii) Per quanto visto al punto (i) la matrice è triangolarizzabile in quanto tutte le radici del polinomio caratteristico sono in $\mathbb{R}$.

Per determinare i valori tali che la matrice A_β risulti essere diagonalizzabile occorre determinare la molteplicità geometrica di ciascun autovalore, distinguendo i casi 1, 2, 3 del punto (i).

A tale scopo ricordiamo la ben nota relazione

$$1 \leq m.g(\lambda_i) \leq m.a.(\lambda_i) \qquad \text{per ogni autovalore } \lambda_i$$

Nel caso 1 abbiano tre autovalori. Poichè λ_1 e λ_3 hanno molteplicità algebrica $= 1$, anche la loro molteplicità geometrica sarà =1.

Per $\lambda_2 = 2$ si ha $m.a. = 2$. Calcoliamoci la molteplicità geometrica. La matrice $A_\beta - 2Id$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta - 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il minore ottenuto eliminando la prima riga e la quarta colonna ha determinante$= \beta \cdot (2 - \beta)$, e quindi per $\beta \neq 0, 2$ è diverso da 0, ovvero $rg(A_\beta - 2Id) = 3$. Allora possiamo concludere che per $\beta \neq 0, 2$ la molteplicità geometrica di 2 è =1, e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

Nel caso 2 si ha $\beta = 0$ e gli autovalori sono 0 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 2. Occorre determinare la molteplicità geometrica di 0 e 2. Analizziamo la matrice $A_0 - 0Id = A_0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La prima colonna e la terza sono evidentemente lin. ind.. La seconda colonna è nulla. La quarta è indipendente dalla terza, pertanto $rg(A) = 2$ e quindi $\dim(Ker(A)) = 4 - 2 = 2 = m.g.(0) = m.a.(0) = 2$.

Analizziamo la matrice $A_0 - 2Id =$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La prima colonna e la terza sono uguali. La quarta colonna è nulla. La seconda è indipendente dalla terza, pertanto $rg(A) = 2$ e quindi $\dim(Ker(A)) = 4 - 2 = 2 = m.g.(2) = m.a.(2) = 2$.

matrice è diagonalizzabile.

Nel caso 3 si ha $\beta = 2$ e gli autovalori sono 0 con molteplicità algebrica 1 e 2 con molteplicità algebrica

3. Occorre determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 . Analizziamo la matrice $A_2 - 2Id$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso la seconda e la quarta colonna sono nulle. La prima e la terza non sono multiple una dell'altra, pertanto si ha $rg(A_2 - 2Id) = 2$ e quindi $2 = m.g.(2) \neq m.a.(2) = 3$ e la matrice non è diagonalizabile.