Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2003/2004

**SOLUZIONE della prova scritta del 09-06-2004**

**Esercizio 1.** Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (w-i)^3 = i \\ e^z = w \end{cases}$$

**Soluzione .** Il sistema in questione è composto da due equazioni in due incognite $z, w$ (appartenenti al campo dei numeri complessi).

Per come sono poste le due equazioni eè più conveniente affrontare la prima, trovando i valori di $w$ e quindi risolvere l-equazione esponenziale.

**(i) :** Operiamo un cambiamento di variabile. Poniamo $u = (w - i)$. Mettendo $u$ nella forma esponenziale $u = \varrho \cdot e^i\vartheta$ l'equazione diventa

$$\begin{cases} \varrho^3 = 1 \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ 3\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte: $\begin{cases} \varrho = 1 \\ \vartheta = \frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}, \quad k = 0,1,2 \end{cases}$

Pertanto otteniamo $u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ , $u_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ , $u_2 = -i$ da cui si ricava le seguenti soluzioni della prima equazione:

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} \quad , \quad w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} \quad , \quad w_2 = 0$$

**(ii) :** Occorre risolvere $e^z = w_i$ per $i = 0, 1, 2$.

Per quanto riguarda $w_2 = 0$ , ricordiamo che l'equazione $e^z = 0$ non ammette soluzione.

Per quanto riguarda $w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$, per risolvere l'equazione $e^z = w_0$ dobbiamo determinare il modulo e l'argomento di siffatto numero. Si ha:

$$|w_0| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3} \quad ; \quad arg(w_0) = \frac{\pi}{3}$$

Pertanto

$$e^z = w_0 \Longleftrightarrow z = log_e(|w_0|) + i(arg(w_0) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow z = log_e(\sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Analogamente, per $w_1$ si ha

$$|w_1| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3} \quad ; \quad arg(w_1) = \frac{2\pi}{3}$$

e quindi

$$e^z = w_1 \Longleftrightarrow z = log_e(|w_1|) + i(arg(w_1) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow z = log_e(\sqrt{3}) + i(\frac{2\pi}{3} + 2h\pi), \quad h \in \mathbb{Z}$$

CONCLUSIONE: le soluzioni del sistema sono

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} \quad ; \quad w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} \ ; \ w_2 = 0$$
$$z_0 = log_e(\sqrt{3}) + i(\frac{2\pi}{3} + 2h\pi), \quad h \in \mathbb{Z} \ ; \quad z_1 = log_e(\sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Esercizio 2.** Al variare del parametro reale $t$ sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 & +x_2 & +(t-1)x_3 \\ & tx_2 & +tx_3 \\ tx_1 & -x_2 & + x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale $t$ si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Si determini per quali valori del parametro $t$ il seguente sistema

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

ammette una, nessuna, o infinite soluzioni.

(iii) Posto $t = 0$ si dica se $\mathbb{R}^3 = Ker(f_0) \bigoplus Im(f_0)$.

**Soluzione .**

**(i) :** Sia $A_t$ la matrice associata ad $f_t$ rispetto alla base canonica: $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & t-1 \\ 0 & t & t \\ t & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcoliamo il determinante di $A_t$ facendo lo sviluppo rispetto alla II riga:

$$\det(A_t) = t \cdot (t - (t^2 - t)) - t \cdot (-t - t) = \ldots = t^2 \cdot (4 - t)$$

Pertanto se $t \neq 0, 4$ il determinante è $\neq 0$ e quindi il rango di $A_t$ è massimo. Ovvero

$$t \neq 0, 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 0$ abbiamo $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $\det A_0 = 0$.

La prima colonna di $A_0$ è nulla. La II = - III. Peertanto il rango di $A_0$ è 1.

Per $t = 4$ abbiamo $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $\det A_4 = 0$.

Inoltre osserviamo che se prendiamo il minore $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(M) \neq 0$.

Pertanto possiamo affermare che il rango di $A_4$ è 2.

Per il teorema della dimensione si ha $\dim(Im(f_t)) + \dim(Ker(f_t)) = 3$. Allora possiamo concludere che

$$t \neq 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \text{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \text{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

$$t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \text{r}k(A_t) = 1 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \text{r}k(A_t) = 2 \end{cases}$$

$$t = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \text{r}k(A_t) = 2 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \text{r}k(A_t) = 1 \end{cases}$$

**(ii)** Per il teorema di Rouché-Capelli esiste almeno una soluzione $\Leftrightarrow$ $\text{r}k(A_t) = \text{r}k(A_t|b_t)$ dove $b_t = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$.

Per il punto (i) se $t \neq 0,4$ si ha $\det(A_t) \neq 0$ e quindi $\text{r}k(A_t) = 3$.

Poichè $\text{r}k(A_t) \leq \text{r}k(A_t|b_t)$ e abbiamo $\text{r}k(A_t|b_t) \leq 3$ perchè $(A_t|b_t)$ è una matrice $3 \times 4$ possiamo concludere che per $t \neq 0,4$ $\text{r}k(A_t) = \text{r}k(A_t|b_t)$. Più precisamente, per questi valori di $t$ esiste un'unica soluzione.

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 0$ la matrice ha $A_0$ ha rango 1. La matrice $(A_0|b_0)$ diventa: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se prendiamo il minore $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(M) \neq 0$, da cui si evince che il rango di $(A_0|b_0)$ è =2 e quindi il sistema non ha soluzione.

Per $t = 4$ la matrice ha $A_4$ ha rango 2. La matrice $(A_4|b_4)$ diventa: $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che la colonna $b_4 =$ I. col di $A$. Pertanto i ranghi sono necessariamente uguali. Allora possiamo concludere che esiste soluzione del sistema e che $\dim\{\text{soluzioni }\} = 3 - 2 = 1$.

CONCLUSIONE:

Esiste un'unica soluzione del sistema $\forall\ t \in \mathbb{R}, t \neq 0,4$.

Il sistema ammette infinite soluzioni per $t = 4$.

Il sistema non ha soluzioni per $t = 0$.

**(iii)** Per $t = 0$, dal punto $(i)$ sappiamo che il rango di $A_0 = 1$. Una base dell'immagine di $f_0$ è data da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Per ottenere una base di $Ker(f_0)$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_2 - x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

che è equivalente all'unica equazione (nelle incognite $x_1, x_2, x_3$ )

$$x_2 - x_3 = 0.$$

Ponendo $x_3 = t$ e $x_1 = s$ otteniamo $Ker(f_0) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. I due sottospazi sono in somma diretta se e soltanto se i tre vettori loro generatori sono linearmente indipendenti, ovvero, se e soltanto se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Poichè tale determinante è $\neq 0$ allora $Ker(f_0)$ e $Im(f_0)$ sono in somma diretta.

**Esercizio 3.**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di $f$ specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di $f$.

(iii) Si determini una base per $Ker(f)$ e una base per $Ker(f^2)$.

**Soluzione.** (i) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ il polinomio caratteristico di $A$ è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$.

Sviluppando rispetto alla I colonna otteniamo:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot (-\lambda - \lambda(\lambda^2 - 1)) = -\lambda^3 \cdot (1-\lambda)$$

Quindi gli autovalori di $A$ sono:
$\lambda_1 = 0$ con molteplità algebrica $= 3$ ;
$\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica $= 1$ .

Per determinare la moteplicità geometrica occorre calcolare il rango di $(A - \lambda Id)$.

Per $\lambda_2 = 1$, poichè sappiamo che $1 \leq\ m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$ per ogni autovalore abbiamo subito $m.g.(1) = 1$.

Per $\lambda_1 = 0$ analizziamo la matrice $(A - 0Id) = A$.

Poiché il minore $M$ ottenuto eliminando la IV colonna e la IV riga $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, si deduce che $rg(A) = 3$ e quindi $m.g.(0) = 4 - 3 = 1$

In particolare la matrice non è diagonalizzabile.

(ii) Per $\lambda_1 = 0$ dobbiamo determinare il $Ker(f)$. Sappiamo dal punto $(i)$ che $m.g.(0) = 4 - 3 = 1$. Inoltre possiamo non considerare la IV riga (che è = III). Ci aspettiamo quindi di trovare un unico parametro nella soluzione parametrica del seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_3 + x_4 & = 0 \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Abbiamo $x_2 = 0$, quindi la prima eq. diventa $x_1 = x_3$ , pertanto tale sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 & = x_3 \\ x_3 & = x_4 \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_4 = t$ gli autovettori per $f$ relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

Per $\lambda_2 = 1$ dobbiamo determinare il $Ker(f - Id)$, ovvero risolvere il sistema $(A - Id) \cdot X = 0_v$. Otteniamo perciò

$$\begin{cases} x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0 \\ x_2 \quad - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Possiamo eliminare la I riga (che è = III). Attraverso il metodo di eliminazione di Gauss otteniamo $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_1$ qualsiasi, e quindi gli autovettori per $f$ relativi all'autovalore $\lambda_2 = 1$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

(n.b. poichè $m.a.(1) = 1$ e dalla matrice si vede che I colonna di A $= f(e_1)$ in questo caso è proprio $= e_1$ si poteva dedurre immediatamente che $e_1$ è l'autovettore di 1).

(iii) Per ottenere una base per $Ker(f)$ basta considerare il punto (ii), poichè $Ker(f) = \{$ autovettori relativi a 0 $\}$. Ovvero una base per $Ker(f)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Per ottenere una una base per $Ker(f^2)$ dobbiamo prendere in considerazione la matrice relativa all'applicazione lineare $f^2$ ottenuta mediante il prodotto di matrici $A \cdot A$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la II riga $= 0$ e la III $=$ IV. Quindi per determinare il $Ker(f^2)$ è sufficiente considerare la I e la III riga e risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 \quad - 2x_3 + x_4 & = 0 \\ \qquad -x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

Abbiamo $x_2 = t$ parametro ($x_2$ non compare nel sistema). Ponendo $x_4 = s$ otteniamo $x_3 = s$ , e $x_1 = s$. Ponendo $(s, t) = (1, 0)$ e quindi $(s, t) = (0, 1)$ una base per $Ker(f^2)$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(N.B. Eè importante osservare che $Ker(f) \subset Ker(f^2)$; questo risultato è un esempio particolare di una vasta teoria relativa alle matrici con nucleo $\neq 0$).