Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2003/2004

SOLUZIONE della prova scritta del 4-02-2004

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^2 = -\overline{z}^2 \\ (z+2)^4 = -4 \end{cases}$$

Soluzione .

(i) : Poniamo z nella forma esponenziale : $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$. Poichè $\overline{z} = \varrho \cdot e^{-i}\vartheta$ e $-1 = e^{i\pi}$ la prima equazione diventa

$$\varrho^2 \cdot e^{i2\vartheta} = e^{i\pi} \cdot \varrho^2 \cdot e^{-i2\vartheta}$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti otteniamo

$$\begin{cases} \varrho^2 = \varrho^2 \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ 2\vartheta = \pi - 2\vartheta + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte: $\begin{cases} \varrho \in \mathbb{R}^+ \quad \textit{qualsiasi} \\ \vartheta = \frac{\pi+2k\pi}{4}, \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$

Pertanto le soluzioni della prima equazione sono

$$z = \pm\varrho \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\varrho \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+$$

(ii) : Posto $w = (z+2)$ l'equazione diventa $w^4 = -4$. Ponendo w nella forma esponenziale $w = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$, poichè $-1 = e^{i\pi}$ la seconda equazione diventa

$$\varrho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = 4 \cdot e^{i\pi}$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti otteniamo

$$\begin{cases} \varrho^4 = 4 \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ 4\vartheta = \pi + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte:

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{\pi+2k\pi}{4}, \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

Le 4 soluzioni sono allora

$$w_0 = 1+i \ , \ w_1 = -1+i \ , \ w_2 = -1-i \ , \ w_3 = 1-i \ ,$$

Poichè dalla sostituzione $w = (z+2)$ abbiamo $z = (w-2)$, le soluzione della seconda equazione diventano:

$z_0 = 1+i-2 = -1+i$, $z_1 = -1+i-2 = -3+i$, $z_2 = -1-i-2 = -3-i$, $z_3 = 1-i-2 = -1-i$,

CONCLUSIONE: Confrontando le due equazioni le soluzioni del sistema sono:
$z_0 = -1+i$,
$z_3 = 1-i-2 = -1-i$.

Esercizio 2. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.
(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema

$$f_t(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^4 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Soluzione .

(i) : Sia A_t la matrice associata, $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Poichè la IV riga = I riga il rango di A_t è uguale al rango del minore M_t ottenuto eliminando la IV riga:

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di M_t facendo lo sviluppo rispetto alla I riga:

$$\det(M_t) = (-1-t) + (t^2-1) = (t-2)(t+1)$$

Pertanto se $t \neq -1, 2$ il determinante è $\neq 0$ e quindi il rango di M_t e quindi quello di A_t è massimo. Ovvero

$$t \neq -1, 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = -1$ abbiamo $M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Sappiamo che det = 0, quindi il rango è ≤ 2.

Poichè il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ha determinante diverso da 0 possiamo affermare che il rango di M_{-1} è 2.

Per $t = 2$ abbiamo $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Anche in questo caso poichè $\det = 0$ e il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0 possiamo affermare che il rango di M_2 è 2.

Per il teorema della dimensione si ha $\dim(Im(f_t)) + \dim(Ker(f_t)) = 3$. Allora possiamo concludere che

$$t \neq -1, 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

$$t = -1, 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 2 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 1 \end{cases}$$

(ii) Per il teorema di Rouché-Capelli esiste almeno una soluzione $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}k(A_t) = \mathrm{r}k(A_t|b_t)$ dove $b_t = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Poichè A_t è una matrice 4×3 necessariamente $\mathrm{r}k(A_t) \leq 3$. Invece $(A_t|b_t)$ è una matrice 4×4. Allora se $\det(A_t|b_t) \neq 0$ abbiamo $\mathrm{r}k(A_t) \leq 3 < 4 = \mathrm{r}k(A_t|b_t)$ e quindi in questo caso non esiste soluzione.

$$\det(A_t|b_t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ t & 1 & 1 & 0 \\ 1 & t & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = t \cdot (t-2)(t+1)$$

Quindi per $t \neq 0, -1, 2$ non esiste soluzione del sistema .

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 0$ la matrice ha A_0 ha rango 3. La matrice $(A_0|b_0)$ diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la colonna b_0 è nulla. Quindi necessariamente $\mathrm{r}k(A_0) = \mathrm{r}k(A_0|b_0)$ ed allora esiste (un'unica) soluzione del sistema.

Per $t = -1$ abbiamo visto in (i) che la matrice ha A_{-1} ha rango 2. La matrice $(A_{-1}|b_{-1})$ diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $\mathrm{r}k(A_{-1}|b_{-1}) \leq 3$. Osserviamo inoltre che il minore ottenuto eliminando la I colonna e la III riga $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo. Quindi si ha $\mathrm{r}k(A_{-1}|b_{-1}) = 3$ e possiamo affermare che non esiste soluzione del sistema.

Per $t = 2$ abbiamo visto in (i) che la matrice ha A_2 ha rango 2. La matrice $(A_2|b_2)$ diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $\mathrm{r}k(A_{-1}|b_{-1}) \leq 3$. Osserviamo inoltre che il minore ottenuto eliminando la I colonna e la II riga $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo. Quindi si ha $\mathrm{r}k(A_2|b_2) = 3$ e possiamo affermare che non esiste soluzione del sistema.

CONCLUSIONE: Esiste almemo una soluzione del sistema se $t = 0$.

(iii) Poniamo $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. In due vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(W) = 2$.

Poichè $\dim(W) = 2$ per ottenere $\mathbb{R}^4 = Im(f_t) \bigoplus W$ necessariamente deve essere $\dim Im(f_t) = 4 - 2 = 2$.

Allora dobbiamo prendere in considerazione solamente i casi $t = -1$ e $t = 2$. Per dimostrare l'asserto è sufficiente dimostrare che presa una base $\{w_1, w_2\}$ di $Im(f_t)$, i vettori w_1, w_2, v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.

Per $t = -1$, per ottenere una base di $Im(f_{-1})$ è sufficiente considerare due colonne della matrice linearmente indipendenti. Possiamo allora prendere le prime due colonne:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice composta dai 4 vettori diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poichè il determinante è diverso da zero $Im(f_{-1})$ e W sono in somma diretta.

Analogamente per $t = 2$, per ottenere una base di $Im(f_2)$ è sufficiente considerare le prime due colonne della matrice:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice composta dai 4 vettori diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In questo caso il determinante è nullo (ed infatti la II colonna= III colonna). Pertanto $Im(f_2)$ e W non sono in somma diretta.

CONCLUSIONE: $\mathbb{R}^4 = Im(f_t) \bigoplus W$ se e soltanto se $t = -1$.

Eserczio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.

(ii) Si dica se f è diagonalizzabile e/o triangolarizzabile.

(iii) Dimostrare che $Ker(f) = Im(f)$.

Soluzione. (i) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$.

Sviluppando rispetto alla II riga

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4$$

Quindi esiste un unico autovalore di A:
$\lambda_1 = 0$ con molteplità algebrica $= 4$;

Per determinare la moteplicità geometrica occorre calcolare il rango di $(A - \lambda Id)$.

Analizzando la matrice $(A - 0Id) = A$ si vede che la III colonna = I colonna, la IV colonna = - I colonna. La I colonna e la II sono linearmente indipendenti, quindi r$k(A) = 2$. Pertanto si ha $m.g.(0) = 4 - \mathrm{r}k(A) = 2$.

Per determinare gli autovalori dobbiamo determinare il $Ker(f)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + \quad +x_3 - x_4 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 + \quad +x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

Abbiamo $x_2 = 0$. Applichiamo l'algoritmo di Gauss. Sostitiendo IV con IV - I abbiamo

$$\begin{cases} x_1 + \quad +x_3 - x_4 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases}$$

ovvero il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + \quad +x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_4 = t$ e $x_3 = s$ abbiamo $x_1 = -s + t$ e quindi possiamo concludere che gli autovettori per f relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad (t, s) \neq (0, 0) \right\}.$$

(ii) Poichè le soluzioni del polinomio caratteristico sono numeri reali (in questo caso abbiamo solamente $\lambda_1 = 0$) la matrice è triangolarizzabile.

Poichè $m.g.(0) = 2 < 4 = m.a.(0)$ la matrice non è diagonalizzabile.

(iii) Per dimostrare che $Ker(f) = Im(f)$ prima di tutto confrontiamo le loro dimensioni. Abbiamo visto nei punti precedenti che r$kA = \dim(Im(f)) = 2$ e che $\dim(Ker(f)) = 4 - 2$.

Poichè i due spazi hanno la stessa dimensione è sufficiente verificare che $Im(f) \subseteq Ker(f)$. L'asserto segue se dimostriamo che i vettori di una base di $Im(f)$ appartengono a $Ker(f)$.

Per ottenere una base di $Im(f)$ consideriamo i primi due vettori della matrice che sono tra loro lin. ind.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora $v_1 \in Ker(f)$ se e soltanto se $A \cdot v_1 = 0_V$, ovvero se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Essendo verificata l'uguaglianza concludiamo che $v_1 \in Ker(f)$.

Ripetendo lo stesso ragionamento per v_2 si vede che $A \cdot v_2 = 0_V$ e quindi anche $v_2 \in Ker(f)$.

La tesi è quindi dimostrata.