Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2003/2004

SOLUZIONE della prova scritta del 16-01-2004

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^z = (2 + i2\sqrt{3}) \cdot e^{2\overline{z}} \\ |z - 4i| > |z| \end{cases}$$

Soluzione .
(i) : Poniamo $w = (2 + i2\sqrt{3})$ nella forma esponenziale:

$$\begin{cases} |w| = |2 + i2\sqrt{3}| = \sqrt{4 + 12} = 4 \\ arg(w) = \frac{\pi}{3} \qquad (\text{poichè } \ x_w = 1/2 \ , y_w = \sqrt{3}/2) \end{cases}$$

La prima equazione diventa quindi

$$e^z = 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{2\overline{z}}$$

Poichè $4 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{2\overline{z}} = e^{\log 4 + i\frac{\pi}{3} + 2\overline{z}}$ tale uguaglianza è verificata se e soltanto se

$$z = \log 4 + i\frac{\pi}{3} + 2\overline{z} + i2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ponendo $z = x + iy$ e uguagliando la parte immaginaria e la parte reale otteniamo:

$$\begin{cases} x = \log 4 + 2x \\ y = -2y + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La soluzione della prima equazione è data da

$$z = -\log 4 + i(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

(ii) : Posto $z = x + iy$ si ha

$$\begin{aligned} &|z - 4i| > |z| && \Leftrightarrow \\ &\sqrt{x^2 + (y-4)^2} > \sqrt{x^2 + (y)^2} && \Leftrightarrow \\ &x^2 + (y-4)^2 > x^2 + (y)^2 && \Leftrightarrow \\ &-8y + 16 > 0 && \Leftrightarrow \\ &y < 2 \ , \quad x = \text{qualsiasi} \end{aligned}$$

CONCLUSIONE: il sistema è equivalente al seguente

$$\begin{cases} z = -\log 4 + i(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = (\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) < 2 \end{cases}$$

e quindi la soluzione è data da $z = -\log 4 + \ i(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})$, con $k \in \mathbb{Z}, \ \ k \leq 0$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 - tx_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ tx_1 + tx_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Si determini per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\quad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 0\}$,

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Ker(f_t) \bigoplus W$.

Soluzione .

(i) : Sia A_t la matrice associata ad f_t rispetto alla base canonica: $A_t = \begin{pmatrix} t & -t & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ t & t & 4 \end{pmatrix}$. Calcoliamo il determinante di A_t facendo lo sviluppo rispetto alla I riga:

$$\det(A_t) = t \cdot (4 - t) + t \cdot (4 - t) + 3(t - t) = 2t \cdot (4 - t)$$

Pertanto se $t \neq 0, 4$ il determinante è $\neq 0$ e quindi il rango di A_t è massimo. Ovvero

$$t \neq 0, 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 0$ abbiamo $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $\det A_0 = 0$.

Inoltre osserviamo che se prendiamo il minore $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(M) \neq 0$.

Pertanto possiamo affermare che il rango di A_0 è 2.

Per $t = 4$ abbiamo $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $\det A_4 = 0$.

Inoltre osserviamo che se prendiamo il minore $M = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(M) \neq 0$.

Pertanto possiamo affermare che il rango di A_4 è 2.

Per il teorema della dimensione si ha $\dim(Im(f_t))+\dim(Ker(f_t)) = 3$. Allora possiamo concludere che

$$t \neq 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

$$t = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 2 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 1 \end{cases}$$

(ii) Per il teorema di Rouché-Capelli esiste almeno una soluzione $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}k(A_t) = \mathrm{r}k(A_t|b_t)$ dove $b_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix}$.

Per il punto (i) se $t \neq 0,4$ si ha $\det(A_t) \neq 0$ e quindi $\mathrm{r}k(A_t) = 3$.

Poichè $\mathrm{r}k(A_t) \leq \mathrm{r}k(A_t|b_t)$ e abbiamo $\mathrm{r}k(A_t|b_t) \leq 3$ perchè $(A_t|b_t)$ è una matrice 3×4 possiamo concludere che per $t \neq 0,4$ $\mathrm{r}k(A_t) = \mathrm{r}k(A_t|b_t)$. Più precisamente, per questi valori di t esiste un'unica soluzione.

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 0$ la matrice ha A_0 ha rango 2. La matrice $(A_0|b_0)$ diventa: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che la colonna $b_0 = 2\cdot$ I col di A. Pertanto i ranghi sono necessariamente uguali. Allora possiamo concludere che esiste soluzione del sistema e che $\dim\{\text{soluzioni }\} = 3 - 2 = 1$.

Per $t = 4$ la matrice ha A_4 ha rango 2. La matrice $(A_4|b_4)$ diventa: $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che III riga $= 4\cdot$ II riga. Quindi possiamo affermare che anche $\mathrm{r}k(A_4|b_4) = 2$. Allora concludiamo che esiste soluzione del sistema e che $\dim\{\text{soluzioni }\} = 3 - 2 = 1$.

CONCLUSIONE: Esiste almemo una soluzione del sistema $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

(iii) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 0\}$. Abbiamo $\dim(W) = 3 - 1 = 2$.

Per determinare una base di W ossiamo porre in questo caso $x_3 = s$ e $x_2 = t$.

Allora $x_1 = 3t - s/2$ e quindi (ponendo $t = 1, s = 0$ e $t = 0, s = 2$) otteniamo la seguente base di W

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Poichè $\dim(W) = 2$ per ottenere $\mathbb{R}^3 = Ker(f_t) \bigoplus W$ necessariamente deve essere $\dim Ker(f_t) = 1$.

Allora dobbiamo prendere in considerazione i casi $t = 0$ e $t = 4$. Per dimostrare l'asserto occorre dimostrare che $Ker(f_t) \cap W = 0_V$ o, equivalentemente, che, presa una base $\{w_t\}$ di $Ker(f_t)$, i vettori w_t, v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.

Per $t = 0$, per ottenere una base di $Ker(f_0)$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{cases}$$

e quindi otteniamo $Ker(f_0) = \langle W_0 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. I due sottospazi sono in somma diretta se e soltanto se w_0, v_1, v_2 sono linearmente indipendenti, ovvero, se e soltanto se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Poichè tale determinante è $\neq 0$ allora $Ker(f_0)$ e W sono in somma diretta.
Analogamente per $t = 4$, per ottenere una base di $Ker(f_4)$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \end{cases}$$

($III \leftrightarrow \; III - 4 \cdot II$; $I \leftrightarrow I - 4 \cdot II$) Il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -8x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

Posto $x_3 = t$, otteniamo $Ker(f_4) = \langle \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \rangle$.

Come nel caso precedente i due sottospazi sono in somma diretta se e soltanto se

$$\det \begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Poichè tale determinante è $= 0$ allora $Ker(f_4)$ e W non sono in somma diretta.

CONCLUSIONE: $\mathbb{R}^3 = Ker(f_t) \bigoplus W$ se e soltanto se $t = 0$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Si determini un insieme costituito da 3 autovettori per f linearmente independenti e lo si completi ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione. (i) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$.
Sviluppando rispetto alla II colonna e quindi rispetto alla III riga otteniamo:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^3 \cdot \lambda$$

Quindi gli autovalori di A sono:
$\lambda_1 = 0$ con molteplità algebrica $= 1$;
$\lambda_1 = 3$ con molteplicità algebrica $= 3$.

Per determinare la moteplicità geometrica occorre calcolare il rango di $(A - \lambda Id)$.

Per $\lambda_1 = 0$, poichè sappiamo che $1 \leq\ m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$ per ogni autovalore abbiamo subito $m.g.(\lambda_1) = 1$.

Per $\lambda_2 = 3$ analizziamo la matrice $(A - 3Id)$.

$$(A - 3Id) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

II colonna è nulla. La IV colonna = - I colonna. La I colonna e la III sono linearmente indipendenti, quindi r$k(A - 3Id) = 2$. Pertanto si ha $m.g.(3) = 4 - rk(A - 3Id) = 2$.

In particolare la matrice non è diagonalizzabile.

(ii) Per $\lambda_1 = 0$ dobbiamo determinare il $Ker(f)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + \quad +5x_3 + 2x_4 & = 0 \\ x_2 + 3x_3 & = 0 \\ 3x_3 & = 0 \\ x_1 + \quad +5x_3 + 2x_4 & = 0 \end{cases}$$

Abbiamo $x_3 = 0$, quindi $x_2 = 0$, pertanto tale sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_4 = t$ gli autovettori per f relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

Per $\lambda_2 = 3$ dobbiamo determinare il $Ker(f - 3Id)$, ovvero risolvere il sistema $(A - 3Id) \cdot X = 0_v$. Otteniamo perciò

$$\begin{cases} -2x_1 + \quad +5x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 3x_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ x_1 + \quad +5x_3 + 2x_4 & = 0 \end{cases}$$

Abbiamo $x_3 = 0$, x_2 qualsiasi, e il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_4 & = 0 \\ x_2 & = s \\ x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_4 = t$ gli autovettori per f relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \quad (t, s) \neq (0, 0) \right\}.$$

(iii) L'insieme da considerare dovrà essere costituito da 2 autovettori linearmente indipendenti relativi a 3 e 1 autovettore relativo a 0.

Possiamo prendere pertanto i seguenti vettori: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per ottenere una base di $\mathbb{R}^4$ occorre aggiungere un quarto vettore in modo tale da ottenere 4 vettori linearmente indipendenti. Tenuto conto che tutti e tre i vettori hanno la terza componente nulla allora possiamo prendere in considerazione il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Verificando che il determinante della matrice formata dai 4 vettori è $\neq 0$ possiamo concludere che i quattro vettori sopracitati costituiscono una base per $\mathbb{R}^4$.