Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2011/2012

Prova scritta del 07/02/2012
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) | MARCO (Nome) | (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 1 + i$. Allora $z^4 =$ $\boxed{-4}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \ , \ Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_2 - x_3 - x_4 = 0\} \ . \text{ Allora:}$$

$\dim(W) = \boxed{3}$ $\dim(W \cap Z) = \boxed{2}$ $\dim(W + Z) = \boxed{4}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{4}$ $\quad \text{rg}(A) = \boxed{2}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{1}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | ~~vero~~ | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$A_1 = \cancel{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Traccia sol. 7-2-2012

(1)
$$\begin{cases} (z+3i)^3 = -8i \\ |z-1| \leq |z| \end{cases}$$

(I:) $z+3i = w$ $\qquad z = w - 3i$

$$\left.\begin{array}{l} w^3 = -8i \\ w = \rho \cdot e^{i\vartheta} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = 8 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

$$\Downarrow$$

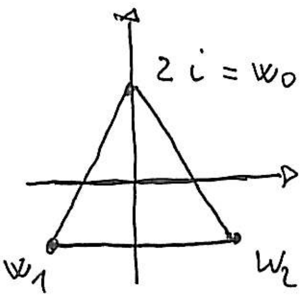
$$\begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\vartheta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

SOL. DISTINTE:
$$\begin{cases} \rho = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2$$

$w_0 = 2i$

$w_1 = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

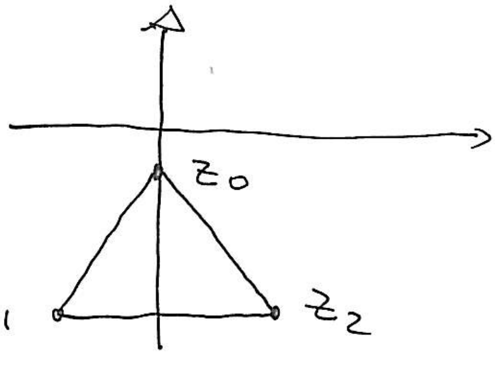
$w_2 = 2\left(+\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$



$z_0 = 2i - 3i = -i$

$z_1 = -\sqrt{3} - 4i$

$z_2 = \sqrt{3} - 4i$



II $\boxed{\text{Poniamo}}$: $z = x + iy$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|z-1| \leq |z| \iff$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \iff$$

$$(x-1)^2+y^2 \leq x^2+y^2 \iff$$

$$-2x+1 \leq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$$

SOLUZIONE SISTEMA $\begin{cases} \text{I} \\ \text{II} \end{cases}$:

$$z_3 = \sqrt{3} - 4i$$

2 $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & t & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$$ matrice 4×3

$\boxed{\text{n.b. } rk(A_t) \leq 3}$

Consideriamo M il minore ottenuto eliminando ~~I~~ II riga

$$M = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \qquad \det(M) = t - 1$$

Quindi per $t \neq 1$ $\exists$ minore 3×3 con $\det \neq 0$

$$\Rightarrow \quad rk(A_t) = 3 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}) = 3 \\ \dim(\ker) = 3 - 3 = 0 \end{cases}$$

caso $t = 1$:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I colonna = III colonna

I col, II col. lin. IND.

$\Rightarrow rk(A_1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}) = 2 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases}$

ii) $\exists$ sol. $\iff rk(A_t) = rk(A_t : b)$

$$(A_t : b) = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ t & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$ matrice 4×4

$\det(A_t : b) = t^2 - t$

$\det(A_t : b) = 0 \iff t = 0, 1$

Quindi se $t \neq 0, 1$ $\det(A_t : b) \neq 0$

$\Rightarrow rk(A_t : b) = 4 > 3 \geq rk(A_t)$

CIOE' se $t \neq 0, 1$ non $\exists$ soluzione

$\underline{t=0}$: $(A_0 : b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b =$ I colonna

$\Downarrow$

$rk(A_0 : b) = rk(A_0) \Rightarrow \exists$ soluzione

⑥

$\underline{t=1}$: $\quad (A_1 : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

det = 0

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ha } \det \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rk(A_1 : b) = 3$$

visto in (i) che $rk(A_1) = 2$

Quindi per $t = 1$

$rk(A_1) = 2 < 3 = rk(A_1 : b) \quad \Rightarrow$ non $\exists$ sol.

CONCLUSIONE: $\exists$ soluzione $\Leftrightarrow t = 0$

(iii) $t=1$: $rk\, A_1 = 2$ (visto in (i)) $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}) = 2$

$\Rightarrow$ Base $\mathrm{Im}(\mathcal{L}_{A_1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathbb{R}^4 = W \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{L}_{A_1}) \quad \Leftrightarrow \quad W = \langle w_1, w_2 \rangle$

&

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_1, w_2 \right\}$ base di $\mathbb{R}^4$

sufficiente: $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

③ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Possiamo costruire f considerando una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e 2 vettori della base canonica

&

determinando il comportamento di f su tali vettori.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$ BASE di $\mathbb{R}^3$

Poniamo:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

f è univocamente determinata dal valore assunto sui vettori di una base matrice associata ad f: A

I modo:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

II modo:

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$ I colonna di A

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ II colonna di A

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ III colonna di A

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CIOE'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{CAR}(\lambda) = (\lambda^2-4)^2 = (\lambda-2)^2(\lambda+2)^2$$

AUTOVALORI: $\lambda_1 = 2$ $m.a. = 2$ $m.g. = 2$

$\lambda_2 = -2$ $m.a. = 2$ $m.g. = 2$

Poiché $\forall$ autovalore λ_i ha $m.a. = m.g.$ allora A è diagonalizzabile

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_1 = 2$

$$V_2 = Ker(A - 2 I_d) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_2 = -2$

$$V_{-2} = Ker(A + 2 I_d) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$