Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2023/2024

Prova scritta del 13/02/2024
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• $i^{25} =$ $\boxed{i}$ • $z = 4 + i3$, $w = 1 + i2 \implies Re(z \cdot w) =$ $\boxed{-2}$

Siano W e Z i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \ , Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_2 - 3x_3 = 0\} \ .$$

• $dim(W + Z) =$ $\boxed{3}$

• Determinare una base di $W \cap Z$

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(L_A)) =$ $\boxed{3}$ $\quad \text{rg}(A) =$ $\boxed{2}$

• $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $\boxed{-4}$ • $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies m.g.(2) =$ $\boxed{1}$

• Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \xcancel{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies A \cdot B =$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

13-2-2024

traccia sol.

①
$$\begin{cases} (z+2)^4 = -64 \\ |e^z| = 1 \end{cases}$$

eq. 1: $z+2 = w \qquad (z = w-2)$

$w = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$$w^4 = -64 \iff \rho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = 64 \cdot e^{i\pi}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^4 = 64 \\ 4\vartheta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

sol. distinte
$$\begin{cases} \rho = \sqrt[4]{64} = 2 \cdot \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \qquad k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$w_0 = 2+2i \qquad\qquad z_0 = 2i$

$w_1 = -2+2i \quad \xrightarrow{z = w-2} \quad z_1 = -4+2i$

$w_2 = -2-2i \qquad\qquad z_2 = -4-2i$

$w_3 = 2-2i \qquad\qquad z_3 = -2i$

eq. 2: $|e^z| = |e^{x+iy}| = \underbrace{|e^x|}_{>0} \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = e^x = 1 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y \text{ qual} \end{cases}$

sol. z_0, z_3

(2) $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 0 & t \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 3x3

$\det(A_t) = t^2 - 2t$

$\det = 0 \iff t = 0, 2$

$t \neq 0, 2$ $\begin{cases} rg(A_t) = 3 \\ \dim(\ker) = 0 \end{cases}$

$t = 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} rg(A) = 2 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases}$

$t = 2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} rg(A) = 2 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases}$

ii) $$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{(A_t|b) \text{ matrice } 3 \times 4}$

$t \neq 0, 2$ $\quad rg(A_t) = 3$

$$\Rightarrow \quad rg(A_t|b) = rg(A_t) = 3$$

$\Rightarrow \exists!$ SOLUZIONE

$t = 0$ $\quad \left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A|b) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ non $\exists$ sol

$t = 2$
$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$b = -$ (colonne 1) $\quad \Rightarrow rg(A|b) = rg(A) = 2$

$\Rightarrow \exists\ \infty$ soluzioni

iii) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

sappiamo che $rg(A) = rg(A|b) = 2$

$\to$ eliminiamo riga 3

(righe 1, 2 sono indip.)

sistema $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 = -2 \end{cases}$

$x_3 = t$

(2): $x_1 = -1 - x_3 = -1 - t$

(1): $x_2 = -1 - x_1 - 2x_3 = -1 - (-1 - t) - 2t = -t$

SOLUZIONE: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sp. affine di dim = 1

3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2 + \alpha = 0 \\ 1 + \beta = 0 \\ 3 + 1 + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha = -5 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -4 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) =$$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$p_A(\lambda) = -\lambda^3$

0 autovalore $\quad m.a. = 3 \quad m.g. = 1$

A è triang.le

A non è diag.le

$\boxed{\text{AUTOSPAZIO:}}$

$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$