Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2023/2024

Prova scritta del 26/1/2024

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 2 - 2\sqrt{3}i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

- Dato $z = 2 - 2\sqrt{3}i$, scrivere z^3 nella rappresentazione cartesiana : $\boxed{-64}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \right\},\ Z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.\quad \text{Allora } \mathbb{R}^3 = W + Z$$

~~vero~~	falso

- Determinare una base di $W \cap Z$

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rg}(A) = \boxed{3} \qquad \dim(Ker(L_A)) = \boxed{2}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{3}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

vero	~~falso~~

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

26 - 1 - 2024

Traccia Soluzioni

1 $\begin{cases} z^6 = -16|z|^2 \\ |z-2i| = |z| \end{cases}$

1ª eq: $z=0$ sol.

$z \neq 0$ $\quad z = \rho \cdot e^{i\vartheta} \Rightarrow z^6 = \rho^6 \cdot e^{i6\vartheta}, \quad |z|^2 = \rho^2$

$$-16 = 16 \cdot e^{i\pi}$$

$$z^6 = -16 \cdot |z|^2 \iff \rho^6 \cdot e^{i6\vartheta} = 16 \cdot \rho^2 \cdot e^{i\pi}$$

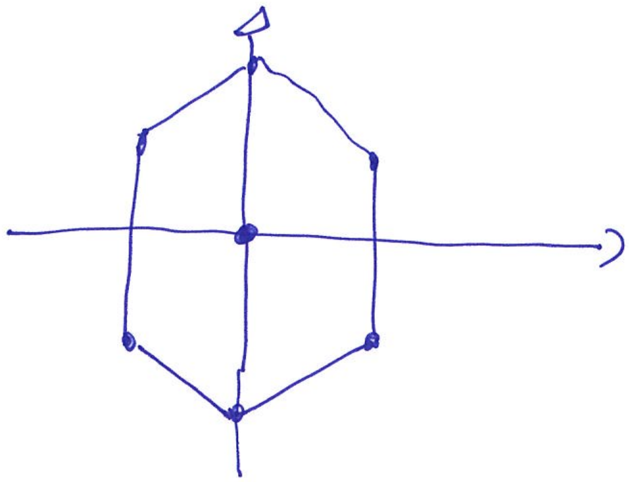
$$\iff \begin{cases} \rho^6 = 16\rho^2 \\ 6\vartheta = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

sol. distinte:

$\rho = 0 \Leftrightarrow z = 0$ già visto

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \vartheta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{6} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

②



$z_0 = \sqrt{3} + i$

$z_1 = 2i$

$z_2 = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = -\sqrt{3} - i$

$z_4 = -2i$

$z_5 = \sqrt{3} - i$

$z_6 = 0$

2^e eq: $\quad |z - 2i| = |z|$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 1 \\ x \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

SOL: $z = x + i$
x qualsiasi

SOL. SISTEMA: $z_0 = \sqrt{3} + i$
$z_2 = -\sqrt{3} + i$

(2) (3)

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 4 \times 3$$

i) oss: riga 1 = riga 4

$\Rightarrow rg(A_t) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -t+2$

$t \neq 2 \qquad rg(A_t) = 3 \qquad \dim(\ker) = 3-3 = 0$

$t = 2: \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

riga 1 = riga 4

riga 2 + riga 3 = 2 · riga 1

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ det $\neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} rg(A) = 2 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases}$

4

ii) $\left(A_t | b\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & t \end{pmatrix}$ $\quad 4 \times 4$

$\det\left(A_t | b\right) = -t^2 + 3t - 2$

$\det = 0 \iff t = 2, 1$

- $t \neq 2, 1$ $\quad rg\left(A_t | b\right) = 4 > 3 \geq rg\left(A_t\right)$

  non $\exists$ SOL.

- $t = 2$ $\quad rg\left(A_t | b\right) = 3 > 2 = rg\left(A_t\right)$

  non $\exists$ sol.

- $t = 1$ $\quad rg\left(A_t | b\right) = 3 = rg\left(A_t\right)$

  $\exists$ SOL.

(iii) $t = 2$ $\quad rg(A) = 2$

BASE $\mathrm{Im}(f_A) = \{$colonne 1, colonne 2$\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{R}^4 = W \oplus \mathrm{Im}(f_A) \iff \begin{cases} a)\ \dim(W) = 4-2=2 \\ b)\ W \cap \mathrm{Im}(f_A) = \{0_V\} \end{cases}$$

b) $\iff$ Posto $W = \langle w_1, w_2 \rangle$

allora $w_1, w_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. IND.

Ad esempio $\quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$$\mathrm{Im}(f) = \{ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \} \qquad \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$$

BASE $\mathrm{Im}(f)$: $\begin{matrix} x_2 = t \\ x_3 = s \end{matrix} \to x_1 = 2t + s$

$$\text{BASE: } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{\text{n.b.} \quad \mathrm{rk} = \dim(\mathrm{Im}) = 2}$

Possiamo scegliere $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ come le prime 2 colonne di A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Teo. dimensione} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}) = 3 - 2 = 1}$

$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$. Scegliamo ad esempio $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Ker} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6+1 \quad + \alpha = 0 \\ 3 \quad + \beta = 0 \\ 1 + \gamma = 0 \end{cases}$$

conclusione: $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

N.B. $\exists\, \infty$ A con queste proprietà!

dipendono dalla scelta delle base di Im

base di Ker

8

4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) $p_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 2)$

AUTOVALORI: 0 m.a. $= 2$ m.g. $= 1$

2 m.a. $= 1$ m.g. $= 1$

0 ha m.g. $= 1$ poiché

$m.g.(0) = \dim(\ker(A - 0 \cdot Id)) = \dim(\ker(A))$

$= 3 - rg(A) = 3 - 2 = 1$

iii) Gli autovalori $\in \mathbb{R} \Rightarrow$ A è triang.^{le}

$m.g.(0) = 1 < 2 = m.a.(0) \Rightarrow$ A non è diag.^{le}

ii) AUTOSPAZI:

$V_0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$