Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2023/2024

Prova scritta del 9/1/2024
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) | MARCO (Nome) | (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $i^{124} = \boxed{1}$ • $z = 1+4i \implies z^{-1} = \boxed{\frac{1}{17} - i\frac{4}{17}}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} , Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$ Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso X |

- Determinare una base di W

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(\mathcal{L}_A)) = \boxed{4} \qquad \text{rg}(A) = \boxed{2}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{-2}$ • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies m.g.(1) = \boxed{1}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \implies A^{-1} : \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione $= \boxed{3}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

9-1-2024

Traccia soluzioni

1 $\begin{cases} z^3 = -2\bar{z} \\ e^{\pi z} = -e^{\pi} \end{cases}$

i) $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ $\qquad -2 = 2 \cdot e^{i\pi}$

$z^3 = -2\bar{z} \iff \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = 2 \cdot \rho \cdot e^{i(\pi - \vartheta)}$

$\iff \begin{cases} \rho^3 = 2\rho \\ 3\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

sol. distinte

$\rho = 0$

cioè

$z = 0$

$\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$

$z_0 = 1 + i$ $\qquad z_2 = -1 - i$

$z_1 = -1 + i$ $\qquad z_3 = 1 - i$

$z_4 = 0$

ii) $e^{\pi z} = \underbrace{-e^{\pi}}_{\substack{\shortparallel \\ e^{\pi + i\pi}}}$

$e^{\pi z} = e^{\pi + i\pi} \iff \pi z = \pi + i\pi + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff z = 1 + i(1+2k), \quad k \in \mathbb{Z}$

SOLUZIONI SISTEMA:

$z_0 = 1 + i$

$z_3 = 1 - i$

2 $A_t = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & t & 2 \end{pmatrix}$

i)

$\det(A_t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$\det = 0 \iff t = 2$

- Per $t \neq 2$ $\quad \det \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} rg = 3 \\ \dim(\ker) = 0 \end{cases}$

- $t = 2$: $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

tutte le colonne sono uguali

$\Rightarrow \begin{cases} rg(A) = 1 \\ \dim(\ker) = 3-1 = 2 \end{cases}$

ii) $$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$t \neq 2$ $\quad rg(A_t) = 3$

$(A_t | b)$ matrice 3×4

$\Rightarrow \quad rg(A_t|b) = 3 = rg(A_t)$

$= \#$ incognite

$\Rightarrow \quad \exists!$ SOLUZIONE

$$t = 2 : \quad (A_t | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$b = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A_t|b) = 1 = rg(A_t)$$

$\Rightarrow \quad \exists$ soluzione

&

$\dim\{\text{soluzioni}\} = 3 - 1 = 2$

3 $t = 2$:

$$rg(A_t) = 1 \Rightarrow Im(\mathcal{L}_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Ker(\mathcal{L}_A) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \{ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \}$$

(Poiché $rg = 1 \rightarrow$ tutte le righe sono multiple delle prime)

$$\dim(Ker) = 2$$

$Im(\mathcal{L}_A) \cap Ker(\mathcal{L}_A)$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 & Ker \\ x_1 = 2t & \\ x_2 = -t & Im \\ x_3 = 2t & \end{cases}$$

sol: $t = 0$ cioè $Im \cap Ker = \{0_V\}$

Quindi $\mathbb{R}^3 = Ker \oplus Im$

3 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$\ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, f suriettiva

$f \leftrightarrow A$ matrice 2×3

- f suriettiva $\Leftrightarrow rg(A) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$
- $\ker(f) \leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Poniamo, ad esempio,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

in questo modo siamo sicuri che $rg(A) = 2$

$$\ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 1 + \alpha = 0 \\ -3 + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

i)

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 3)^2$$

autovalori: $\lambda_0 = 0$ m.a. $= 2$

$\lambda_1 = 3$ m.a. $= 2$

$$\text{m.g.}(0) = \dim(\operatorname{Ker}(A)) = 4 - rg(A) = 2$$

$$\text{m.g.}(3) = \dim(\operatorname{Ker}(A - 3Id)) = 4 - rg(A - 3Id) = 2$$

poiché $A - 3Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

colonna 2 = 0
colonna 4 = - colonna 1
colonne 1, 3 lin. ind.

iii) In particolare $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$

$\forall \lambda_i$ si ha m.a.(λ_i) = m.g.(λ_i)

$\Rightarrow$ A è triangolarizzabile & diagonalizzabile

ii) AUTOSPAZI

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$