Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2023/2024

Prova scritta del 19/12/2023
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) MARCO (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}$

- $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \Rightarrow z^4 =$ $\boxed{-16}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \} , \; Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle .$$

Determinare una base di $W \cap Z$

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(Ker(\mathcal{L}_A)) = \boxed{3} \qquad rg(A) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{6}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile | X vero | falso |

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{1/2}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

19/12/2023

Traccia soluzioni

1 $\begin{cases} (z-3)^4 = 4(\bar{z}-3)^2 \\ |e^z| = e^2 \end{cases}$

SOL.

i) $(z-3)^4 = 4(\bar{z}-3)^2$

Poniamo $w = z-3 \quad \to \quad z = w+3$

$\bar{w} = \bar{z} - 3$

eq. $\Leftrightarrow \quad w^4 = 4\bar{w}^2$

$w = \rho \cdot e^{i\vartheta} \qquad w^4 = \rho^4 \cdot e^{i4\vartheta} \quad , \bar{w}^2 = \rho^2 \cdot e^{-i2\vartheta}$

eq $\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^4 = 4\rho^2 \\ 4\vartheta = -2\vartheta + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

sol. distinte $\quad \rho = 0$ cioè $w = 0 \qquad \begin{cases} \rho = 2 \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{6} \quad k = 0, 1, \ldots, 5 \end{cases}$

$w_0 = 2 \qquad\qquad z_0 = 2+3 = 5$

$$w_1 = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}$$

$$z_1 = 1+i\sqrt{3}+3 = 4+i\sqrt{3}$$

analogamente:

$w_2 = -1 + i\sqrt{3} \qquad\qquad z_2 = 2+i\sqrt{3}$

$w_3 = -2 \qquad\qquad z_3 = +1$

$w_4 = -1-i\sqrt{3} \qquad\qquad z_4 = 2-i\sqrt{3}$

$w_5 = 1-i\sqrt{3} \qquad\qquad z_5 = 4+i\sqrt{3}$

$w_6 = 0 \qquad\qquad z_6 = 3$

ii) $$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x|\cdot|e^{iy}| = e^x$$

poiché $e^x \in \mathbb{R}^+$

$|e^{iy}| = |\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y| = 1$

Quindi $|e^z| = e^2 \iff e^x = e^2$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

SOLUZIONE SISTEMA: $z_2 = 2+i\sqrt{3}$, $z_4 = 2-i\sqrt{3}$

(2) $A_t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ t & 2 & 3 \\ 0 & -5 & t \end{pmatrix}$ matrice 3x3

i) $\det(A_t) = -t^2 + 8t - 15$

$\det = 0 \iff t = 3, 5$

Quindi

$t \neq 3,5 \quad \det \neq 0 \implies rg = max = 3$

$\dim(Ker) = 3 - 3 = 0$

$t = 3$: $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$; $\det(A) = 0$

$\implies \begin{cases} rg = 2 \\ \dim(Ker) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

$t = 5$: $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$; $\det(A) = 0$

$\implies \begin{cases} rg = 2 \\ \dim(Ker) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

ii) ~~Per quanto visto in i)~~

$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sisteme
3 eq.
3 incognite

PER QUANTO VISTO in i):

$$rg(A_t) = 3 \quad \text{per} \quad t \neq 3, 5$$

$(A_t | b)$ matrice 3×4

quindi per $t \neq 3, 5$

$$3 \geq rg(A_t | b) \geq rg(A_t) = 3$$

$$\Rightarrow \quad rg(A_t|b) = 3 = rg(A_t)$$

$$3 = \# \text{ incognite}$$

$\exists!$ SOLUZIONE

Casi particolari: ($t=3,5$ $\text{rg}(A_t)=2$)

$t=3$: $(A_t|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right)$

colonna b = − colonna 1

$\Rightarrow \text{rg}(A_t|b) = \text{rg}(A_t) = 2$

$\Rightarrow \exists$ SOLUZIONE

&

$\dim\{\text{SOLUZIONI}\} = \dim(\text{Ker}) = 1$

$t=5$: $(A_t|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right)$

$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$

$\Rightarrow \text{rg}(A_t|b) = 3$

Pertanto $\text{rg}(A_t|b) = 3 > 2 = \text{rg}(A)$

$\Rightarrow$ NON $\exists$ SOLUZIONE

iii) $\quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim(W) = 1$

Pertanto $\quad \mathbb{R}^3 = W \oplus \operatorname{Im}(L_{A_t})$

$\Rightarrow \quad \dim(\operatorname{Im}(L_{A_t})) = 2 = 3 - 1$

unici casi possibili : $t = 3, 5$

Occorre verificare condizione $W \cap \operatorname{Im}(L_{A_t}) = \{0\}$

o

equivalentemente

Se $\{v_1, v_2\}$ base di $\operatorname{Im}(L_{A_t})$

allora $\left\{ v_1, v_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è BASE di $\mathbb{R}^3$

$t=3$: per quanto visto in i) le colonne 1, 2 sono lin IND $\Rightarrow$ costituiscono una BASE di $\operatorname{Im}(L_{A_t})$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono lin. IND. $\left(\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \right)$

quindi costituiscono una BASE di $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \qquad \mathbb{R}^3 = W \oplus \mathrm{Im}(f_{A_t}) \quad \text{per } t=3$$

$t=5$: Analogamente al caso $t=3$

$$v_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono lin. IND.

$$\Rightarrow \qquad \mathbb{R}^3 = W \oplus \mathrm{Im}(f_{A_t}) \quad \text{per } t=5$$

3 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare t.c.

$$Ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Im(f) = \{ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$$

Osserviamo che $\dim(Im(f)) = 2$
$\dim(Ker(f)) = 1$

Quindi una f con queste proprietà è possibile.

Portiamo $Im(f)$ in forma parametrica:

$$x_2 = t$$
$$x_3 = s$$
$$x_1 = +2t - s$$

$$\Rightarrow Im(f) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

Pertanto:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sono base di } Im(f)$$

Poniamo $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = colonna 1 di A

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = colonna 2 di A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

condizione $Ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 - 1 + 2\alpha = 0 \\ 1 + 2\beta = 0 \\ 1 + 2\gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Conclusione: una possibile f è determinata da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) =$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

= sviluppo rispetto colonna 4 e successivamente rispetto riga 2

$$= (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot \lambda^2$$

radici: 1 m.a. $= 2$

0 m.a. $= 2$

autovalore 0:

$m.a.(0) = 2$

$m.g.(0) = \dim(\ker(A)) = 4 - rg(A)$

$rg(A) = 3 \Rightarrow m.g.(0) = 1$

autovalore 1:

$m.a.(1) = 2$

$m.g.(1) = \dim(\ker(A - Id)) = 4 - rg(A - Id)$

$rg(A - Id) = 3 \Rightarrow m.g.(1) = 1$

ii) ~~Poiché m.a.~~

Tutte le radici di $p_A(\lambda) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A è triangolarizzabile

$\exists$ autovalore t.c. $m.a. \neq m.g.$

$\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile

ii) AUTOVETTORI

Autospazio relativo a $\lambda = 0$

$$V_0 = \mathrm{Ker}\,(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Autospazio relativo a $\lambda = 1$

$$V_1 = \mathrm{Ker}\,(A - Id)$$

$$= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$