Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2022/2023
Prova scritta del 10/01/2023
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = 1 - i \implies z^4 =$ $\boxed{-4}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\},\ Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$
Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | ~~falso~~ |

- Determinare una base di $W \cap Z$

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) = \boxed{3}$ $\quad \dim(Ker(L_A)) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{3}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | ~~falso~~ |

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = $\boxed{2}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{\frac{3}{2}}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

10 - 1 - 2023

1

$$\begin{cases} z^3 = -2\pi^2 \bar{z} \\ e^z = -e^{\pi} \end{cases}$$

(i) $z = \rho \cdot e^{i\vartheta} \Longrightarrow$ $z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta}$

$\bar{z} = \rho \cdot e^{-i\vartheta}$

$$-2\pi^2 = (2\pi^2) \cdot e^{i\pi}$$

eq $\Longleftrightarrow$ $\rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = 2\pi^2 \cdot \rho \cdot e^{i(\pi - \vartheta)}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 2\pi^2 \rho \\ 3\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

sol. distinte

$\rho = 0$

$\Updownarrow$

$z = 0$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \cdot \pi \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$z_0 = \pi + i\pi$

$z_1 = -\pi + i\pi$

$z_2 = -\pi - i\pi$

$z_3 = \pi - i\pi$

$z_4 = 0$

(ii) $e^z = -e^{\pi} \iff e^z = \underbrace{e^{i\pi} \cdot e^{\pi}}_{= e^{\pi + i\pi}}$

$\iff z = \pi + i\pi + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$

conclusione:

SOL. SISTEMA $z_0 = \pi + i\pi$

$z_3 = \pi - i\pi$

2 $A_t = \begin{pmatrix} t & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix}$

i) $\det(A_t) = -2t^2 + 18$

$\det = 0 \iff t = \pm 3$

Quindi per $t \neq \pm 3$ $\begin{cases} rg(A_t) = 3 \\ \dim Ker(A_t) = 0 \end{cases}$

$t = \pm 3$: $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} rg(A) = 2 \\ \dim(Ker(A)) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

ii) $\exists$ sol. $\iff rg(A_t) = rg(A_t | b)$

$\forall t$ la colonne $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ = colonne 2 di A_t

Quindi

$\forall t$ $rg(A_t) = rg(A_t | b)$ OVVERO $\exists$ SOL.

Per $t \neq \pm 3$ la sol. è unica

Per $t = \pm 3$ $\{$soluzioni$\}$ costituisce uno spazio affine di $\dim = 1$

(iii)

$$A_3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Alg. di Gauss:

$(3) \Leftrightarrow (3) - \frac{1}{3}(1)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ -\frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$(3) \Leftrightarrow (3) + \frac{2}{3} \cdot (2)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

oss. sapendo che $rg = 2$ potevamo considerare le prime due righe.

$x_3 = t$

$x_2 = 1 - t$

$x_1 = \frac{1}{3}\left(4 - 4(\cancel{1}-t) + 5t\right) = 3t$

$\underline{SOL}: \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

---

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$Im(f) = \{ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \}$

$Ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$Im(f)$: equazione parametrica

$\begin{cases} x_2 = t \\ x_3 = s \\ x_1 = -t + 3s \end{cases}$

$= t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ BASE di $Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Possiamo provare ponendo le colonne 1, 2 di A = vettori base di Im(f).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \iff A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -1 + 6 + a = 0 \\ 1 + b = 0 \\ 2 + c = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \, Id) = \ldots = \lambda^3 \cdot (\lambda - 2)$$

RADICI: 0 con molt. $= 3$

2 con molt. $= 1$

$$rg(A - 0 \cdot Id) = 3 \Rightarrow m.g.(0) = 4 - 3 = 1$$

AUTOVALORI: 0 $\quad m.a.(0) = 3 \quad m.g.(0) = 1$

2 $\quad m.a.(2) = 1 \quad m.g.(2) = 1$

ii) A è triang.^{le} ; A non è diag.^{le}

) AUTOSPAZI:

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$